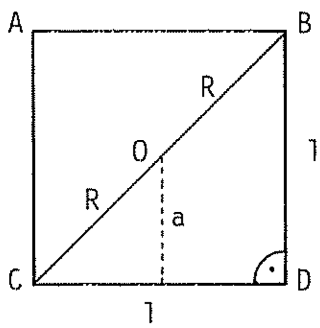
TEMA 10

GEOMETRIA DEL PLANO

1. RELACION ENTRE EL LADO Y EL RADIO EN EL CUADRADO, EL HEXAGONO REGULAR Y EL TRIANGULO EQUILATERO

Todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia. Estudiemos por separado, las relaciones entre el lado del polígono y el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita.

a) Cuadrado.



Trazando la diagonal CB, se forma el triángulo rectángulo CDB, al cual aplicamos Pitágoras, fijándonos en que la hipotenusa vale 2R y los catetos l.

$$(2R)^2 = l^2 + l^2$$

Elevamos al cuadrado y agrupamos.

$$4R^2 = 2l^2$$

Cambiamos el orden y simplificamos.

$$l^2 = 2R^2$$

Extraemos la raíz cuadrada a los dos miembros.

$$\boxed{l = R.\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Si nos dieran el lado y nos pidieran el radio, despejando en (1).

$$R = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Y racionalizando, queda.

$$\boxed{R = \frac{l.\sqrt{2}}{2}} \qquad (2)$$

El radio hallado es el de la circunferencia circunscrita. Si nos pidieran el radio de la inscrita, no tenemos más que hallar la apotema, a, del cuadrado. Fijándonos en la figura, es fácil ver que.

$$\boxed{a = \frac{l}{2}} \qquad (3)$$

Y, si lo queremos expresar en función de R.

$$\boxed{a = \frac{R.\sqrt{2}}{2}} \qquad (4)$$

Ejemplo 1: Hallar el perímetro de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 metros de radio.

Aplicando (1), calculo el radio.

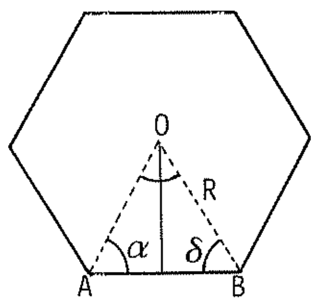
$$l = R.\sqrt{2}$$

$$l = 3.\sqrt{2}$$

Como el perímetro es la suma de sus 4 lados.

$$p = 4.l = 4.3.\sqrt{2} = \underline{12.\sqrt{2}\text{ metros}}$$

b) Hexágono regular.



Desde O, trazamos los radios OA y OB, formándose el triángulo AOB.

Este triángulo, por tener dos lados iguales; $\overline{OA} = \overline{OB} = R$, también tiene los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\delta}$ iguales.

Por otra parte, el ángulo central $\hat{O}$, según se vió en la página 151, fórmula (10), vale.

$$\hat{O} = \frac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$$

Como la suma de los ángulos de un triángulo vale 180º.

$$\hat{O} + \hat{\alpha} + \hat{\delta} = 180^{\circ}$$

Sustituyendo el ángulo $\hat{O}$ por su valor, en la expresión anterior.

$$60^{\circ} + 2.\hat{\alpha} = 180^{\circ}$$

$$2.\hat{\alpha} = 180^{\circ} - 60^{\circ}$$

$$2.\hat{\alpha} = 120^{\circ}$$

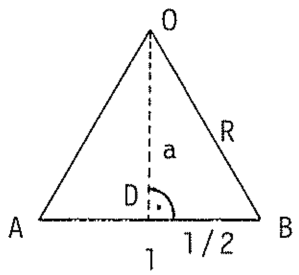
$$\hat{\alpha} = 60^{\circ} \qquad\qquad \hat{\alpha} = \hat{\delta} = \underline{60^{\circ}}$$

Hemos comprobado que los tres ángulos; $\widehat{O}, \widehat{\alpha}$ y $\widehat{\delta}$ del triángulo AOB son iguales, por tanto el triángulo AOB es equilátero.

Si es equilátero, sus tres lados son iguales. Luego podemos poner.

$$\boxed{l = R} \qquad (5)$$

"El lado del hexágono regular coincide con el radio de la circunferencia circunscrita".



Si deseáramos hallar la apotema a, que es el radio de la inscrita, trazamos en el triángulo AOB la apotema OD, con lo que se forma el triángulo rectángulo ODB, al cual aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$R^2 = a^2 + \overline{DB}^2$$

Como la apotema divide en dos partes iguales el lado, podemos poner.

$$\overline{DB} = \frac{l}{2}$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior.

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Elevamos al cuadrado y utilizando (5), lo expresamos todo en función del lado.

$$l^2 = a^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$a^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{4 . l^2 - l^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{3 . l^2}{4}$$

Extrayendo la raíz cuadrada, queda finalmente.

$$\boxed{a = \frac{l . \sqrt{3}}{2}} \qquad (6)$$

Ejemplo 2: La apotema de un hexágono regular vale $6.\sqrt{3}$ m. Hallar el perímetro de dicho hexágono.

Aplicando (6), despejando l y sustituyendo el dato del enunciado.

$$a = \frac{l.\sqrt{3}}{2}$$

$$l.\sqrt{3} = 2.a$$

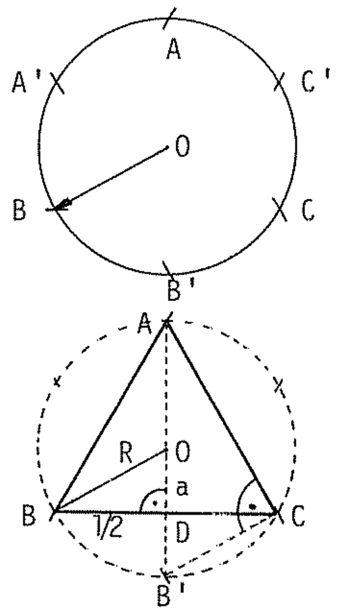
$$l = \frac{2.a}{\sqrt{3}}$$

$$l = \frac{2.6.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12 \text{ m}$$

El perímetro es la suma de los 6 lados.

$$p = 6.l = 6.12 = \underline{72 \text{ m}}$$

c) Triángulo equilátero.



Comencemos trazando una circunferencia de radio R. Como, según hemos visto en el apartado anterior, el lado del hexágono coincide con el radio de la circunferencia circunscrita, tomando el radio y llevándolo seis veces sobre la circunferencia señalamos los puntos AA'BB'CC', que serían los vértices del hexágono inscrito.

Sin embargo, vamos a unir los puntos alternativamente, con lo cual se formará el triángulo equilátero ABC.

Prolongando la apotema AD hasta cortar la circunferencia en B' y uniendo este punto con C, se forma el triángulo rectángulo ACB' que es recto en C, por estar inscrito en una semicircunferencia.

Aplico el teorema de Pitágoras al triángulo ACB'.

$$\overline{AB'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{B'C}^2 \qquad (7)$$

$\overline{AB'} = 2R$ por ser un diámetro de la circunferencia.

$\overline{AC} = l$ pues es el lado del triángulo equilátero.

$\overline{B'C} = R$ por ser el lado del hexágono, que ya hemos dicho que coincide con el radio.

Sustituyendo estos valores en (7).

$$(2R)^2 = l^2 + R^2$$

$$4R^2 = l^2 + R^2$$

Despejando l^2.

$$l^2 = 4R^2 - R^2$$
$$l^2 = 3R^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada.

$$\boxed{l = R\sqrt{3}} \qquad (8)$$

Expresión que nos permite conocer el lado del triángulo equilátero - inscrito en una circunferencia de radio R.

Si nos pidieran hallar el radio.

$$R = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Y racionalizando.

$$\boxed{R = \frac{l\sqrt{3}}{3}} \qquad (9)$$

Para hallar la apotema OD, aplico Pitágoras al triángulo rectángulo ODB.

$$R^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DB}^2$$

$\overline{OD} = a$, es la apotema del triángulo.

$\overline{BD} = \frac{l}{2}$, pues la apotema divide en dos mitades al lado.

Sustituyendo estos valores en la expresión anterior.

$$\left(\frac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Elevamos al cuadrado y despejamos a^2.

$$a^2 = \frac{3l^2}{9} - \frac{l^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{4l^2 - 3l^2}{3.4}$$

$$a^2 = \frac{l^2}{3.4}$$

Extrayendo la raíz cuadrada.

$$a = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

Racionalizando, queda finalmente.

$$\boxed{a = \frac{1\sqrt{3}}{6}} \qquad (10)$$

Si nos pidieran la apotema en función del radio, sustituyendo en (10) el valor del lado obtenido en (8), nos queda.

$$a = \frac{R\sqrt{3}.\sqrt{3}}{6}$$

$$a = \frac{R.3}{6}$$

$$\boxed{a = \frac{R}{2}} \qquad (11)$$

Las expresiones (10) y (11), nos permiten hallar la apotema de un -- triángulo equilátero, que es a su vez el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

Ejemplo 3: En una circunferencia de 12 m de radio inscribimos un triángulo e-- quilátero. Hallar el radio de la circunferncia inscrita a dicho tri ángulo.

Hallamos, primero, el lado del triángulo utilizando (8).

$$l = R\sqrt{3}$$

$$l = 12\sqrt{3}$$

El radio de la inscrita coincide con la apotema. hallémosla, utilizando (10).

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$$

$$a = \frac{12\sqrt{3}.\sqrt{3}}{6} = \frac{12.3}{6} = \frac{36}{6} = \underline{6\ m}$$

También podríamos haber aplicado (11), con lo cual se obtiene el -- mismo resultado, más rápidamente.

$$a = \frac{R}{2}$$

$$a = \frac{12}{2} = \underline{6\ m}$$

Ante tal avalancha de fórmulas, no es aconsejable que el alumno las memorice, sino que debe ser capaz de hallarlas por sí mismo, siguiendos los pasos que se han expuesto.

Obsérvese que en todos los casos, el truco consiste en hallar un triángulo rectángulo y aplicarle el teorema de Pitágoras, despejando a continuación el valor que nos interese.

TABLA DE EQUIVALENCIAS ENTRE EL RADIO, LA APOTEMA Y EL LADO

	LADO	RADIO	APOTEMA(l)	APOTEMA(R)
Triángulo equilátero	$l = R\sqrt{3}$	$R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$	$a = \frac{l\sqrt{3}}{6}$	$a = \frac{R}{2}$
Cuadrado	$l = R\sqrt{2}$	$R = \frac{l\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{l}{2}$	$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}$
Hexágono regular	$l = R$	$R = l$	$a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$	$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

2. AREAS DE FIGURAS PLANAS

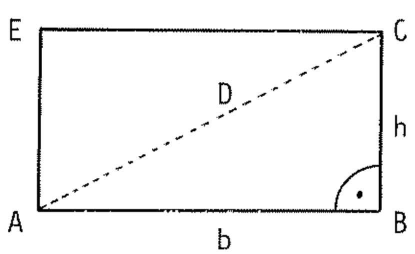
Calcular el área de una figura plana limitada por una línea poligonal, consiste en hallar la superficie encerrada dentro de los contornos de dicha línea.

Existen una serie de figuras que por su simetría permiten encontrar expresiones matemáticas sencillas para el cálculo de su superficie.

Cuando la figura es irregular, debemos descomponerla en sumas o sustracciones de figuras planas de área conocida, siempre que sea posible.

Vayamos viendo, a continuación, algunas figuras de uso frecuente en geometría.

a) Rectángulo.



Es un cuadrilátero de ángulos iguales.

Su área vale.

$$\boxed{A = b.h} \qquad (12)$$

Si nos pidieran la diagonal D, observemos que se forma el triángulo rectángulo CBA, al cual podemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$$\boxed{D^2 = b^2 + h^2}$$

A partir de esta expresión se puede despejar la diagonal, la base o la altura del rectángulo, según sean las condiciones del problema.

Ejemplo 4: En un rectángulo de 48 m^2 de área, la base es 3 veces mayor que la altura. Hallar la diagonal de ese rectángulo.

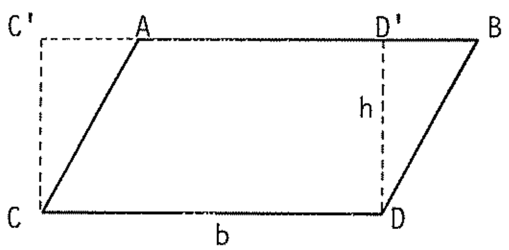
Utilizando (12) y aplicando la condición; base = 3.altura, despejo la altura.

$$A = b.h$$
$$48 = 3.h.h$$
$$3h^2 = 48$$
$$h^2 = \frac{48}{3}$$
$$h = \sqrt{16} = 4 \text{ m}$$
$$b = 3.h = 3.4 = 12 \text{ m}$$

Finalmente la diagonal la hallamos utilizando (13)

$$D^2 = b^2 + h^2$$
$$D^2 = 12^2 + 3^2 = 144 + 9 = 153$$
$$D = \sqrt{153} = \underline{12,37 \text{ m}}$$

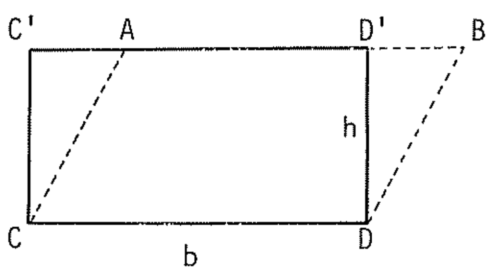
b) Paralelogramo.



Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos e iguales.

Para calcular su área, levantamos perpendicular a la base CD desde los vértices C y D hasta cortar el lado AB y su prolongación en C' y D', con lo cual se forman los triángulos rectángulos CC'A y DD'B.

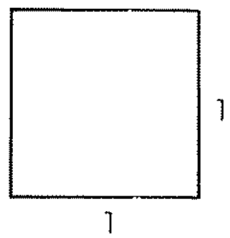
Como ambos tienen la misma hipotenusa, $\overline{AB} = \overline{BD}$, según la definición de paralelogramo, los triángulos CC'A y DD'B son iguales.



Si son iguales, podemos "recortar" el triángulo DD'B y superponerlo al CC'A con lo cual obtenemos el rectángulo C'D'DC de la figura, cuya área según (12) vale.

$$\boxed{A = b.h}$$

c) Cuadrado.

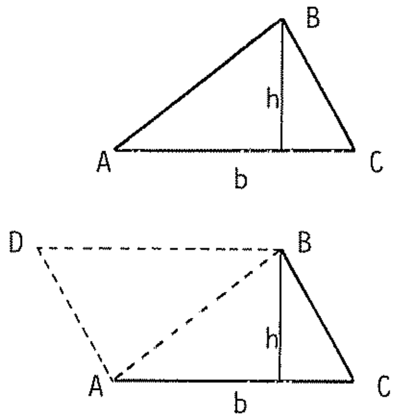


Es un cuadrilátero con los lados y los ángulos iguales.

Llamando "l" al lado y aplicando - (12), el área queda.

$$\boxed{A = l^2} \qquad (14)$$

d) Triángulo.



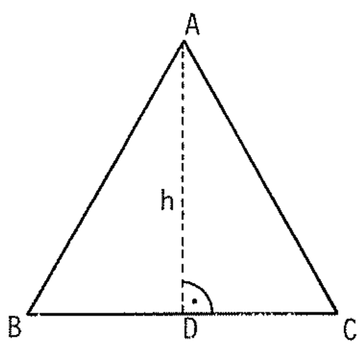
Dado un triángulo cualquiera, por ejemplo, el ABC de la figura, tracemos por los vértices A y B paralelas a los lados BC y AC respectivamente, que se -- cortarán en el punto D.

Comprobamos que se forma el paralelogramo ABCD, cuya área es doble de la del triángulo, pues ABC = ABD, por te-- ner los tres ángulos iguales y un lado común, el AB.

El área del triángulo es pues, la mitad de la del paralelogramo.

$$\boxed{A = \frac{1}{2}.b.h} \qquad (15)$$

Ejemplo 5: Hallar el área de un triángulo equilátero, cuyo lado mide $2\sqrt{3}$ m.



Trazando la altura h, se forma el triángulo rectángulo ADC, al cual puedo aplicar el teorema de Pitágoras.

$$\overline{AC}^2 = h^2 + \overline{CD}^2$$

$\overline{AC} = 2\sqrt{3}$, por ser el lado del triángulo

$\overline{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, por quedar dividido el lado BC en dos mitades por la altura.

Sustituyendo arriba y despejando h.

$$h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$$
$$h^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2$$
$$h^2 = 4.3 - 3 = 12 - 3 = 9$$
$$h = \sqrt{9} = 3$$

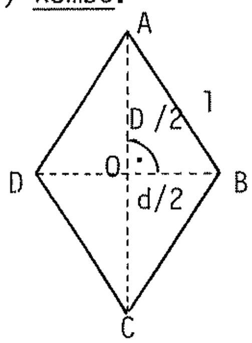
Una vez conocida la altura, aplico (15).

$$A = \frac{1}{2}.b.h$$

$$A = \frac{1}{2}.\sqrt{3}.3$$

$$A = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ m^2$$

e) Rombo.



Es un cuadrilátero con los lados iguales y los ángulos opuestos iguales.

Para determinar su área, tracemos las dos diagonales AC y DB, con lo cual el rombo queda dividido en 4 triángulos rectángulos iguales.

Hallemos el área de uno cualquiera de ellos, por ejemplo, el AOB.

Su área, según (15) vale.

$$A = \frac{1}{2}.\overline{OB}.\overline{AO}$$

$\overline{OB} = \frac{d}{2}$, es la mitad de la diagonal menor.

$\overline{AO} = \frac{D}{2}$, " " " " " " mayor.

Sustituyendo estos valores arriba y multiplicando por 4.

$$A = 4.\frac{1}{2}.\frac{D}{2}.\frac{d}{2}$$

Simplificando, queda finalmente.

$$\boxed{A = \frac{D.d}{2}} \qquad (16)$$

Ejemplo 6: Hallar la diagonal menor de un rombo si la diagonal mayor mide 4 m y el área 12 m².

A partir de (16), despejo d.

$$A = \frac{D.d}{2}$$

$$D.d = 2.A$$

$$d = \frac{2.A}{D}$$

Sustituyo los datos del problema.

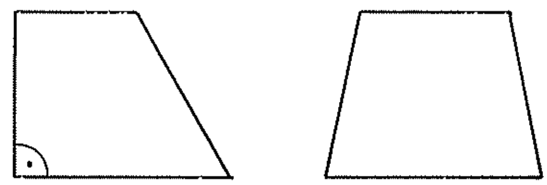
$$d = \frac{2.12}{4} = \frac{24}{4} = \underline{6\ m}$$

f) Trapecio.

Es un cuadrilátero con dos lados paralelos, opuestos entre sí.

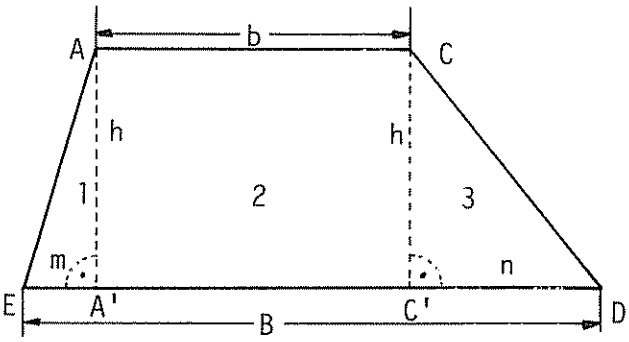
Si tiene un ángulo recto, recibe el nombre de trapecio rectángulo.

Si los dos lados no paralelos son iguales recibe el nombre de trapecio isósceles.



tr. rectángulo tr. isósceles

Para calcular el área en un trapecio cualquiera, por ejemplo, el ACDE, descomponemos su área en 3 figuras conocidas, trazando las proyecciones de A y de C sobre ED.

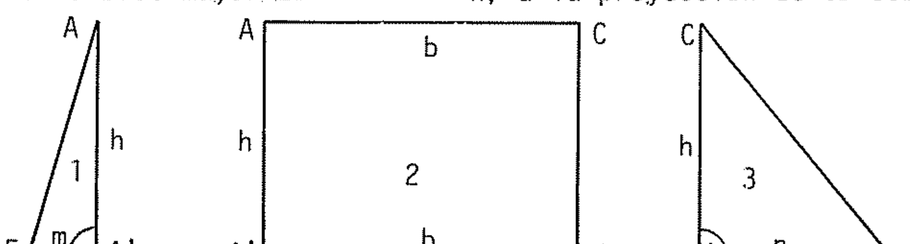


Se nos forma:

- el triángulo rectángulo AA'E.
- el rectángulo ACC'A'.
- el triángulo rectángulo CC'D.

Llamamos:

- b, a la base menor AC.
- B, a la base mayor ED
- m, a la proyección de AE sobre ED.
- n, a la proyección de CD sobre ED.



$A_1 = \frac{1}{2}.m.h$ $A_2 = b.h$ $A_3 = \frac{1}{2}.n.h$

El área total es la suma de estas tres áreas parciales.

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = \frac{1}{2}.m.h + b.h + \frac{1}{2}.n.h$$

Sumando estos tres términos y sacando la altura del trapecio, h, como factor común.

$$A = \frac{mh + 2bh + nh}{2}$$

$$A = \frac{m + n + 2b}{2} . h$$

Haciendo; $2b = b + b$

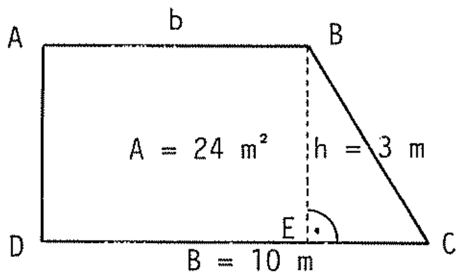
$B = m + b + n$

Y sustituyendo estos valores arriba, queda finalmente.

$$\boxed{A = \frac{(B + b)}{2} . h} \qquad (17)$$

Expresión que nos permite hallar el área de un trapecio conocidas -- sus dos bases y la altura.

Ejemplo 7: En un trapecio rectángulo de área 24 m², la base mayor mide 10 m y la altura 3 m. hallar el perímetro del trapecio.



Utilizando (17), despejo la base - menor, b.

$$A = \frac{(B + b)}{2} . h$$

$$B + b = \frac{2A}{h}$$

$$b = \frac{2A}{h} - B$$

Sustituyo los datos del problema.

$$b = \frac{2.24}{3} - 10 = \frac{48}{3} - 10 = 16 - 10 = 6 \text{ m}$$

Conocidas las dos bases, es fácil ver sobre la figura que.

$$\overline{EC} = B - b = 10 - 6 = 4 \text{ m}$$

Al trazar la altura h, se forma el triángulo rectángulo BEC, al cual aplico el teorema de Pitágoras.

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2$$

$\overline{BE} = 3$, por ser la altura.

$\overline{EC} = 4$, según hemos demostrado antes.

Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, queda.

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

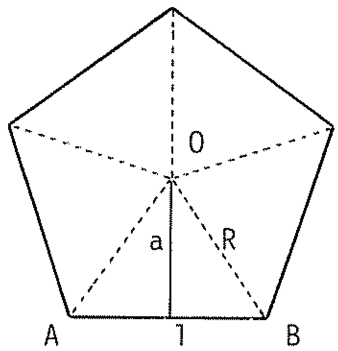
$$\overline{BC} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

El perímetro de un triángulo es igual a la suma de sus lados.

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{DA}$$

$$p = 6 + 5 + 10 + 3 = \underline{24\ m}$$

g) Polígono regular.



Tomemos, por ejemplo, un pentágono de lado l y apotema a.

Unamos el centro del polígono con los vértices, con lo cual se forman 5 triángulos isósceles. En general, se formarán n triángulos, tantos como lados tenga el polígono regular.

Tomemos el triángulo AOB y hallemos su área, aplicando (15).

$$A = \frac{1}{2}.l.a$$

Si el polígono es regular, los n triángulos son iguales. Por tanto, el área del polígono es igual a la suma de los n triángulos así formados.

Multiplicando la expresión anterior por n, obtenemos.

$$A = \frac{1}{2}.n.l.a$$

Ahora bien, la expresión n.l, representa el perímetro del polígono. Sustituyendo arriba este valor nos queda finalmente.

$$\boxed{A = \frac{p.a}{2}} \qquad (18)$$

Ejemplo 8: En un heptágono, el lado mide 8 m y su área 89,317 m^2. Hallar el radio de la circunferencia inscrita.

El radio de la inscrita es la apotema del polígono, luego aplico (18) y despejo a.

$$A = \frac{p.a}{2}$$

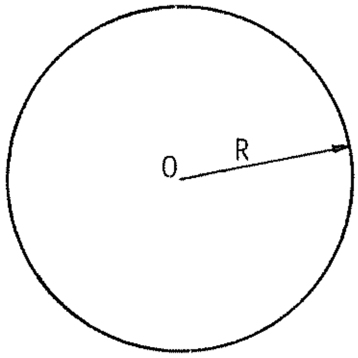
$$p.a = 2A$$

$$a = \frac{2A}{p}$$

Sustituyo los datos del problema.

$$a = \frac{2.89,317}{8.7} = \underline{3,19\ m}$$

h) Círculo.



Comencemos hallando la longitud de la circunferencia que limita el círculo

Una circunferencia puede considerarse como un polígono regular de infinito número de lados.

Recordemos que el número "pi" (π) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\pi = \frac{C}{D}$$

Despejando C, y como el diámetro es el doble del radio; D = 2R

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

De acuerdo con lo que hemos dicho al principio, para hallar el área del círculo no tenemos más que utilizar la expresión (18) que nos da el área de los polígonos regulares.

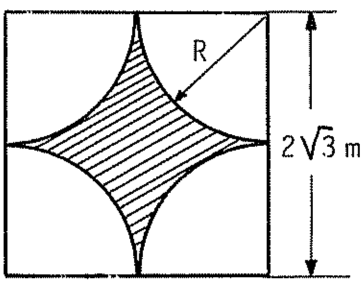
En este caso, el perímetro del polígono equivale a la longitud de la circunferencia y la apotema es el radio del círculo. Por consiguiente.

$$A = \frac{2\pi R.R}{2}$$

Simplificando, queda fianlmente.

$$\boxed{A = \pi R^2} \qquad (19)$$

Ejemplo 9: Hallar el área rayada de la figura.



Fijándonos en el dibujo observaremos que el área rayada es igual al área del cuadrado menos el área de los 4 cuadrantes de círculo.

$$A_{rayada} = A_{cuadrado} - 4.A_{cuadrantes}$$

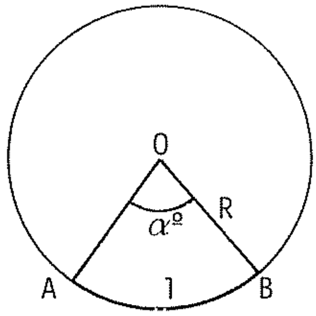
Los 4 cuadrantes equivalen a 1 círculo completo de radio, $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$$A_{cuadrado} = 1^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4.3 = 12 \text{ m}^2$$

$$A_{círculo} = \pi R^2 = \pi(\sqrt{3})^2 = 3\pi \text{ m}^2$$

$$A_{rayada} = 12 - 3\pi = \underline{3.(4 - \pi) \text{ m}^2} = \underline{2,575 \text{ m}^2}$$

i) Sector circular.



Un sector circular viene a ser como una ración de un pastel circular.

Para hallar el área del sector circular AOB, planteamos la siguiente regla de tres.

Si el ángulo fuera de 360º el área sería de πR^2 m^2
para un ángulo de αº " " " " A m^2

Despejando A de esta proporcionalidad directa.

$$\boxed{A = \frac{\pi R^2 \alpha^{o}}{360^{o}}} \qquad (20)$$

Si el ángulo viniera expresado en radianes, la expresión anterior toma la forma.

Para un ángulo de 2π radianes el área es de πR^2
" " " " α " " " " " A

$$A = \frac{\pi R^2 \alpha}{2\pi}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}.R^2.\alpha} \qquad (21)$$

Si nos dieran el valor l, del arco $\widehat{AB}$, recordando la expresión (1) del tema 8 (pág 140), y sustituyendo en (21), queda.

$$\boxed{A = \frac{1}{2}.R.l} \qquad (22)$$

Ejemplo 10: En una tarta de 20 cm de radio medimos un arco de 10 cm sobre la circunferencia exterior. Uniendo los puntos extremos del arco con el centro obtenemos un sector circular.
Hallar el área de dicho pedazo de tarta y el ángulo central en radianes.

a) Utilizo (22) y sustituyo los datos del problema.

$$A = \frac{1}{2}.l.R = \frac{1}{2}.10.20 = \frac{200}{2} = \underline{100\ cm^2}$$

b) A partir de (21), despejo el ángulo α.

$$A = \frac{1}{2}.R^2.\alpha$$

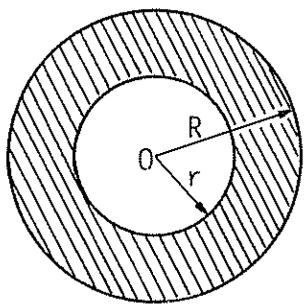
$$R^2 . \alpha = 2A$$

$$\alpha = \frac{2A}{R^2}$$

Y sustituyendo los datos del problema.

$$\alpha = \frac{2.100}{20^2} = \frac{200}{400} = \underline{0,5 \text{ radianes}} = 28^{\circ}\ 38'\ 52''$$

j) Corona circular.



Es el área comprendida entre dos círculos concéntricos.

El área de la corona es igual al área del círculo grande menos el área del círculo pequeño.

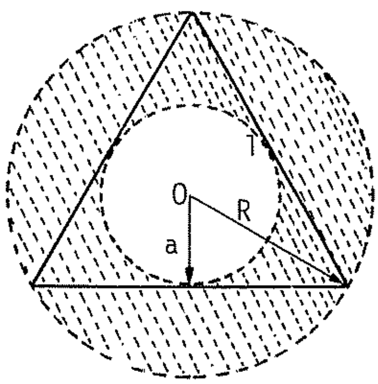
Aplicando (19) escribimos.

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

Tomando π, como factor común, queda finalmente.

$$\boxed{A = \pi(R^2 - r^2)} \qquad (23)$$

Ejemplo 11: Hallar el área comprendida entre las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo equilátero de $36\sqrt{3}$ metros de perímetro.



El lado del triángulo vale.

$$l = \frac{p}{3} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$$

Utilizando (9) y (10) y recordando que la apotema coincide con el radio de la circunferencia inscrita, hallamos los radios R y r, correspondientes a las dos circunferencias.

$$R = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$R = \frac{12\sqrt{3}.\sqrt{3}}{3} = \frac{12.3}{3} = 12 \text{ m}$$

$$a = r = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{12\sqrt{3}.\sqrt{3}}{6} = \frac{12.3}{6} = 6 \text{ m}$$

Una vez conocidos los radios, utilizando (23), hallo el área de la corona circular.

$$A = \pi.(R^2 - r^2) = \pi.(144 - 36) = \underline{108\pi \text{ m}^2}$$

EJERCICIOS DEL TEMA 10

NOTA: En los problemas de geometría es frecuente la aparición de números irracionales, (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$), por lo que los resultados aparecerían plagados de decimales. Para evitar ésto, en casi todos los ejercicios propuestos se intenta que los radicandos sean cuadrados perfectos.

Cuando aparezca alguna expresión irracional, el alumno NO DEBE hallar su valor decimal, sino trabajar el radical o el número "pi", a fin de facilitar los cálculos y ofrecer una presentación más elegante de los resultados.

1.10: Hallar el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de $2\sqrt{2}$ m de radio.

2.10: La apotema de un cuadrado mide 5 m. ¿Cuál es su área?.

3.10: El área de un cuadrado vale 49 m². Hallar su perímetro.

4.10: Hallar el área del círculo circunscrito a un cuadrado de $6\sqrt{2}$ m de lado

5.10: La diagonal de un cuadrado mide $5\sqrt{2}$ m. Calcular el área y el perímetro del cuadrado.

6.10: En un rectángulo, la diagonal vale 40 m. Si la base mide 32 m, hallar la altura y el área.

7.10: De todos los rectángulos de 36 m² de área. ¿Qué relación debe existir entre la base y la altura para que el perímetro sea el menor posible? NOTA: Puedes ir probando números enteros para la base y la altura e ir anotando los resultados.

8.10: A un rectángulo de 72 m² de área y 9 m de base, le dibujamos sus dos diagonales que se cortan en un punto. ¿A qué distancia se encuentra ese punto de la base y del otro lado?.

9.10: Hallar el área comprendida entre las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrado de $8\sqrt{2}$ m de lado.

10.10: Hallar la diagonal de un rectángulo si la altura mide 12 m y el área 192 m².

11.10: Hallar el perímetro de un rombo si sus diagonales miden 72 m y 54 m respectivamente.

12.10: El lado de un triángulo equilátero mide $8\sqrt{3}$ m. Calcular su altura.

13.10: En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 91 m y el cateto pequeño 35 m. Hallar su área.

14.10: Hallar el área del círculo inscrito en un rombo de diagonales 24 y 18 m respectivamente.
NOTA: Utilizar la fórmula (1) del tema 9 para hallar el radio de la inscrita que coincide con la altura del triángulo rectángulo formado por el lado del rombo y las dos semidiagonales.

15.10: En un triángulo isósceles la base mide 48 m y el perímetro 128 m. Hallar su área.

16.10: En un rombo de 98 m^2 de área, la diagonal mayor es 4 veces la diagonal menor. Hallar su perímetro.

17.10: Un triángulo equilátero mide $9\sqrt{3}$ m^2 de área. Hallar su perímetro.

18.10: Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se forman otros 4 triángulos equiláteros iguales más pequeños. demostrar que el área de estos triángulos es la cuarta parte del área del triángulo mayor.

19.10: Un paralelogramo de lados iguales mide 17 m de base. Si la diagonal mayor mide 30 m, hallar la diagonal menor.

20.10: Hallar el lado de un rombo cuyas diagonales miden 96 y 40 metros .

21.10: Las diagonales de un trapecio rectángulo miden 25 m y 17 m. Si la altura mide 15 m, hallar el área del trapecio.

22.10: En un trapecio isósceles, la altura mide 15 m, el área 270 m^2 y cada uno de los lados no paralelos 17 m. Hallar su área.

23.10: En una circunferencia de 3 m de radio y 2,703 m de apotema se inscribe un polígono regular, tal que la suma de sus ángulos interiores vale 900º Hallar el área de dicho polígono.

24.10: La apotema de un hexágono regular inscrito en una circunferencia vale $4\sqrt{3}$ m. Hallar el perímetro y el área de dicho hexágono.

25.10: En un círculo de 41 cm de radio se traza una cuerda de 18 cm de longitud. Hallar las dos áreas en que la cuerda divide al área del círculo, si el arco que abarca la cuerda mide 0,4426 radianes.

26.10: Hallar el área de la corona circular formada por las circunferencias circunscrita e inscrita a un cuadrado de 6 m de lado.

27.10: El área de la corona circular formada por las circunferencias circunscrita e inscrita a un cuadrado vale 49π m^2. Hallar el perímetro y el área de dicho cuadrado.

28.10: El área de una corona circular es de 40π m^2. Si el radio de la circunferencia menor es de 3 m. ¿Cuánto vale el radio de la mayor?.

29.10: Un rectángulo de dimensiones 7 y 24 metros, está inscrito en un círculo. Hallar el área de dicho círculo.

30.10: El radio de una circunferencia mide 6 m. Sobre este radio como diámetro se ha trazado otra circunferencia. ¿Cuál es el área comprendida entre estas dos circunferencias.

31.10: Hallar el área de un círculo sabiendo que el perímetro del hexágono regular inscrito en él mide 72 m.

32.10: La longitud del arco de un sector circular de 4 m de radio es de 0,6 m. Hallar el área de ese sector y el valor de su ángulo central.

33.10: En un rombo, la diagonal mayor mide 30 m y el lado 17 m,. Hallar su superficie.

34.10: Hallar el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 10 m de radio y 9,239 m de apotema.

35.10: Hallar el área de un círculo, sabiendo que la longitud de su circunferencia es de $6\sqrt{\pi}$ metros.

36.10: Hallar el área del rombo formado al unir los puntos medios de un rectángulo de dimensiones, 8 y 12 metros.

37.10: El área de un hexágono regular vale $12\sqrt{3}$ m^2. Hallar:
a) el perímetro del hexágono.
b) la longitud de la circunferencia inscrita.
c) la longitud de la circunferencia circunscrita.

38.10: Calcular la apotema de un decágono regular de 4 m de radio y 24,72 m de perímetro.

39.10: En una chapa cuadrada de $8\sqrt{2\pi}$ cm de lado se realiza un agujero en su centro. ¿Qué diámetro ha de tener el agujero para que el área del cuadrado quede reducida a la mitad?.

40.10: Una naranja (esférica) de 5 cm de radio es ceñida por un cordón a lo largo de su circunferencia. Si a ese cordón le añadimos 1 metro y lo volvemos a situar concéntrico con la naranja. ¿Qué distancia habrá entre la superficie de la naranja y el cordón así alargado?.

41.10: Imaginemos que disponemos de un cable flexible con el que podemos ceñir la circunferencia de la Tierra,(Radio = 6.400.000 metros). Si a ese cable le añadimos 1 metro más y lo situamos concéntrico con la Tierra. ¿Qué distancia habrá entre la superficie de la Tierra y el cordón así alargado?.
¿Qué conclusiones sacas comparando este resultado con el del problema anterior?.

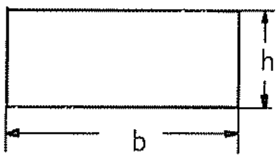
42.10: En una diana formada por 4 coronas circulares concéntricas, ¿qűe relación tiene que existir entre los 4 radios para que las 4 áreas sean iguales?.

43.10: Se colocan tres monedas iguales, tangentes entre sí. Hallar el área del hueco que dejan en el medio, en función del radio de las monedas.

44.10: ¿Cuál es el valor del lado de un cuadrado que tiene la misma superficie de un círculo de radio R?.
NOTA: Dar el resultado en función de R.

CUADRO RESUMEN DE AREAS DE ALGUNAS FIGURAS PLANAS

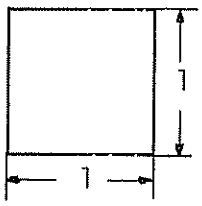
a) Rectángulo.



$A = b.h$

$p = 2b + 2h$

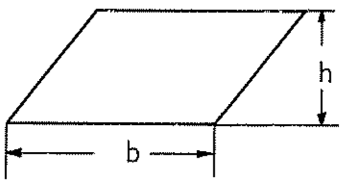
b) Cuadrado.



$A = l^2$

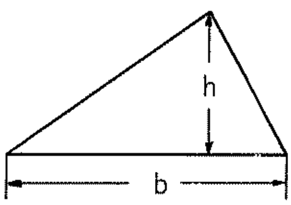
$p = 4.l$

c) Paralelogramo.



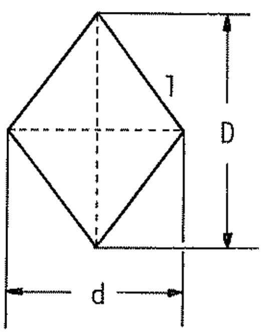
$A = b.h$

d) Triángulo.



$A = \frac{1}{2}.b.h$

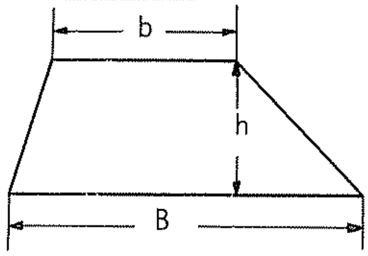
e) Rombo



$A = \frac{D.d}{2}$

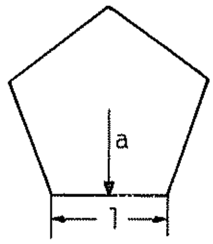
$p = 4.l$

f) Trapecio.



$A = \frac{B + b}{2}.h$

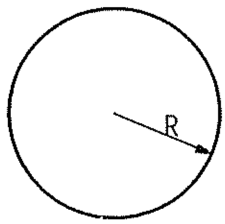
g) Polígono regular.



$p = n.l$

$A = \frac{p.a}{2}$

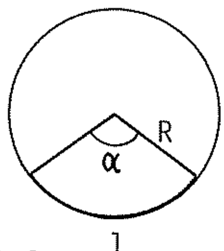
h) Círculo.



$A = \pi R^2$

$C = 2.\pi.R$

i) Sector circular.

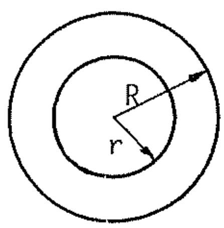


$A = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^{\circ}}$

$A = \frac{1}{2}.R^2.\alpha\,(rad.)$

$A = \frac{1}{2}.R.l$

j) Corona circular.



$A = \pi.(R^2 - r^2)$