TEMA 8

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. DEFINICIONES ELEMENTALES

Fracción algebraica es el cociente indicado entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplos: $\dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$, $\dfrac{5x^3 - 4x^2y + xy^2 - y^3}{(x + y)(x - y)}$, $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$

Una fracción algebraica decimos que es propia respecto a una letra cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador respecto a esa letra.

Una fracción es impropia cuando el grado del numerador es igual o mayor que el grado del denominador.

En los ejemplos anteriores, la 1ª y la 3ª fracción son propias y la 2ª es impropia.

Valor numérico de una fracción algebraica es el valor numérico que toma al sustituir las letras que la forman por su valor numérico.

Puede ocurrir que, al calcular el valor numérico de una fracción algebraica obtengamos expresiones del tipo 0/0. Este cociente no puede realizarse y decimos que existe una indeterminación, la cual puede resolverse por métodos de simplificación que estudiaremos más adelante.

Si obtenemos expresiones del tipo $\frac{n}{0}$ ó $\frac{-n}{0}$ siendo n un número real cualquiera distinto de cero, el resultado no es numerable, asignándole el valor $+\infty$ ó $-\infty$ respectivamente.

Ejemplo 1: Hallar el valor numérico de la fracción; $\dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 3}$

a) Cuando x = -4.

$$\frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-4 - 1}{(-4)^2 + 2.(-4) - 3} = \frac{-5}{16 - 8 - 3} = \frac{-5}{5} = -1$$

b) Cuando x = -3

$$\frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-3 - 1}{(-3)^2 + 2.(-3) - 3} = \frac{-4}{9 - 6 - 3} = \frac{-4}{0} = \infty$$

c) Cuando x = 1.

$$\frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1 - 1}{1^2 + 2.1 - 3} = \frac{0}{1 + 2 - 3} = \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminación)}$$

Dos fracciones algebraicas se dice que son equivalentes cuando adquieren el mismo valor numérico para cualquier sistema de valores de sus letras, siempre que no anulen el denominador.

Dadas dos fracciones algebraicas equivalentes, sus productos en cruz son iguales.

Por ejemplo, las fracciones; $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ y $\frac{a - b}{a + b}$ son equivalentes, pues al realizar los productos cruzados se obtiene una identidad.

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{a - b}{a + b}$$

$$(a^2 - 2ab + b^2)(a + b) = (a^2 - b^2)(a - b)$$

$$a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

Para cualquier valor que le demos a la $\underline{a}$ y a la $\underline{b}$ se cumple la equivalencia entre ambas fracciones.

2. PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES ALGEBRAICAS

"Si multiplicamos o dividimos los dos términos de una fracción algebraica por una misma expresión, distinta de cero, se obtiene otra fracción equivalente a la primera excepto para los valores que anulen el denominador de alguna de las fracciones".

Por ejemplo;
$$\frac{3x}{y^2} = \frac{3x.zy}{y^2.zy} = \frac{3xyz}{y^3z}$$

$$\frac{4a^2b}{6ab^2} = \frac{4a^2b/ab}{6ab^2/ab} = \frac{2a}{3b}$$

3. SIMPLIFICACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Simplificar una fracción algebraica es transformarla en otra equivalente cuyos términos sean de menor grado.

Para realizar la simplificación dividiremos los dos términos de la fracción por una expresión que sea factor común de ambos.

En realidad, lo que nos interesa es obtener la fracción irreducible, es decir, aquella que no perminte más simplificaciones.

Consideremos dos casos:

a) Los dos términos de la fracción algebraica son monomios.

1º) Dividimos los coeficientes de los dos términos de la fracción por el máximo común divisor de ambos. Si fueran primos entre sí, se divide el uno por el otro, dejando el resultado indicado en forma de fracción.

2º) En cuanto a la parte literal, dividimos numerador y denominador por las letras elevadas al menor exponente con que aparecen en la fracción.

Ejemplo 2: Simplificar la fracción; $\dfrac{20a^5b^4c^2d}{5a^4b^5c^2}$.

El máximo común divisor de los coeficientes vale;

$$m.c.d.(20,5) = 5$$

Las letras comunes son; a, b y c.

Los menores exponentes con que aparecen son; a^4, b^4, c^2.

Por tanto, deberemos dividir los dos términos de la fracción por, $5a^4b^4c^2$.

$$\frac{20a^5b^4c^2d}{5a^4b^5c^2} = \frac{20a^5b^4c^2d:5a^4b^4c^2}{5a^4b^5c^2:5a^4b^4c^2} = \frac{4ad}{b}$$

La fracción $\dfrac{4ad}{5}$ es equivalente a $\dfrac{20a^5b^4c^2d}{5a^4b^5c^2}$, e irreducible.

b) Los dos términos, o al menos uno, son polinomios.

1º) Descomponemos los polinomios en factores, siguiendo las normas expuestas en el punto 7 del tema anterior.

2º) Eliminamos los factores comunes al numerador y denominador, dividiendo ambos términos de la fracción por los factores comunes.

Ejemplo 3: Simplificar la fracción; $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$

El numerador es el desarrollo del cuadrado de un binomio.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

El denominador representa el producto de una suma por su diferencia

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Sustituyamos estas descomposiciones en la fracción original.

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{a + b}{a - b}$$

3. REDUCCION DE FRACCIONES A DENOMINADOR COMUN

Reducir una serie de fracciones algebraicas a denominador común es hallar otras, equivalentes a las primeras, pero con el mismo denominador.

Dadas varias fracciones, para reducirlas a denominador común, seguiremos los siguientes pasos:

1º) Si los términos de las fracciones están formados por polinomios, los descomponemos en factores, simplificando a continuación, si es posible.

2º) Observamos todos los denominadores. Si son primos entre sí, el denominador común es el producto de todos los denominadores.

Si no fuera así, el denominador común se forma multiplicando todos los factores no comunes elevados a sus propios exponentes, por los factores comunes elevados a los máximos exponentes con que aparecen cada uno.

3º) Dividimos el denominador común, por cada denominador original, multiplicando el resultado obtenido por el numerador correspondiente.

Este valor es el nuevo numerador.

Ejemplo 4: Reducir a denominador común las fracciones:

$$\frac{2x-1}{x},\ \frac{5}{x+1},\ \frac{x}{x-3},\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$$

La 4ª fracción está formada por dos polinomios, descompongámoslos en factores.

Aplicando Ruffini, o bien, resolviendo la ecuación de 2º grado obtenemos las raíces.

$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ $\qquad$ $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

Sustituyendo estos valores, queda.

$$\frac{2x-1}{x},\ \frac{5}{x+1},\ \frac{x}{x-3},\ \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x+1)}$$

Observemos que los factores comunes del denominador son; $\underline{(x+1)}$ y $\underline{(x-3)}$.

Los no comunes son; $\underline{x}$.

Dividimos por cada denominador y multiplicamos por su numerador correspondiente.

$\frac{x(x+1)(x-3)}{x} = (x+1)(x-3);$ $\quad$ $(x+1)(x-3)(2x-1)$ Num. 1ª

$\frac{x(x+1)(x-3)}{(x+1)} = x(x-3);$ $\quad$ $5x(x-3)$ " 2ª

$\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-3)} = x(x+1);$ $\quad$ $x^2(x+1)$ " 3ª

$\frac{x(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = x;$ $\quad$ $x(x-2)(x-1)$ " 4ª

Por tanto, las nuevas fracciones equivalentes son:

$$\frac{2x-1}{x} = \frac{(x+1)(x-3)(2x-1)}{x(x+1)(x-3)}$$

$$\frac{5}{x+1} = \frac{5x(x-3)}{x(x+1)(x-3)}$$

$$\frac{x}{x-3} = \frac{x^2(x+1)}{x(x+1)(x-3)}$$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x(x-2)(x-1)}{x(x+1)(x-3)}$$

Todas ellas con idéntico denominador.

4. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

a) Suma y resta

Podemos distinguir dos casos.

1º) Todas las fracciones tienen igual denominador.

La suma o resta de varias fracciones algebraicas es otra fracción que tiene el mismo denominador y el numerador es la suma o resta de sus numeradores.

Ejemplo 5: Calcular:

$$\frac{5a - 2}{n} + \frac{2a}{n} - \frac{3 - 8a}{n}$$

El denominador común es $\underline{n}$.

El numerador se obtiene sumando algebraicamente los numeradores.

$5a - 2 + 2a -(3 - 8a) = 5a - 2 + 2a - 3 + 8a = 15a - 5$

Obsérvese que cuando delante de la fracción aparece un signo <u>menos</u>, debemos cambiar el signo a todos los términos del numerador.

Por tanto.

$$\frac{5a - 2}{n} + \frac{2a}{n} - \frac{3 - 8a}{n} = \frac{5a - 2 + 2a - 3 + 8a}{n} = \frac{15a - 5}{n}$$

2º) Las fracciones tienen distinto denominador.

En este caso se reducen a denominador común según se ha indicado en la pregunta 3 y luego se opera como en el caso anterior.

Ejemplo 6: Calcular;

$$\frac{2x}{x - 1} + \frac{3x + 1}{x - 1} - \frac{1 - x}{x^2 - 1}$$

El denominador de la 3ª fracción se puede descomponer según;

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

Sustituyendo arriba, queda.

$$\frac{2x}{x - 1} + \frac{3x + 1}{x - 1} - \frac{1 - x}{(x + 1)(x - 1)}$$

El denominador común vale; $(x + 1)(x - 1)$.

Reduciendo a denominador común, obtenemos.

$$\frac{2x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{(3x + 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{1 - x}{(x + 1)(x - 1)}$$

Realizamos la suma.

$$\frac{2x(x + 1) + (3x + 1)(x + 1) - (1 - x)}{(x + 1)(x - 1)}$$

Desarrollamos el numerador y reducimos términos semejantes.

$$\frac{2x^2 + 2x + 3x^2 + x + 3x + 1 - 1 + x}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{5x^2 + 7x}{x^2 - 1}$$

b) <u>Producto</u>

Para multiplicar dos fracciones algebraicas, multiplicamos los numeradores y denominadores entre sí, simplificando, si es posible, la fracción resultante.

Es recomendable factorizar previamente los numeradores y denominadores cuando están expresados en forma polinómica, a fin de facilitar las simplificaciones posteriores.

Ejemplo 7: Calcular;

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \frac{xy + y^2}{x^2 - xy}$$

Descomponemos en factores la 1ª fracción.

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y)$

En la 2ª fracción sacamos factor común la <u>y</u> y la <u>x</u>, respectivamente

$xy + y^2 = y(x + y)$

$x^2 - xy = x(x - y)$

Sustituimos arriba y simplificamos.

$$\frac{(x + y)(x - y)}{(x + y)(x + y)} \cdot \frac{y(x + y)}{x(x - y)} = \frac{(x + y)(x - y)y(x + y)}{(x + y)(x + y)x(x - y)} = \frac{y}{x}$$

c) <u>Cociente</u>

Para dividir dos fracciones algebraicas, multiplicamos la primera -- fracción por el recíproco de la segunda, simplificando a continuación, si es - posible, la fracción resultante.

Es recomendable factorizar previamente los numeradores y denominadores cuando están expresados en forma polinómica, a fin de facilitar las simplificaciones posteriores.

Ejemplo 8: Calcular;

$$\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} : \frac{a - b}{4a + 4b}$$

Descomponemos en factores la 1ª fracción.

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

Sustituimos arriba.

$$\frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a + b)} : \frac{a - b}{4(a + b)}$$

Invertimos la 2ª fracción y cambiamos el signo ":" por el signo "."

$$\frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a + b)} \cdot \frac{4(a + b)}{(a - b)} = \frac{4(a + b)(a - b)(a + b)}{(a + b)(a + b)(a - b)} = \underline{4}$$

5. <u>FRACCIONES CON DENOMINADOR NULO</u>

Cuando estudiábamos el valor numérico de una fracción algebraica, -- comprobábamos que en algunos caso no era posible otorgarle un valor numérico a ciertas fracciones del tipo; $\pm \frac{n}{0}$ y $\frac{0}{0}$.

En el primer caso, le asignamos el valor infinito "∞" y en el se-- gundo aparece una indeterminación.

Para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, debemos factorizar previamente los polinomios que componen la fracción, simplificando a continuación los factores comunes. De esta forma obtenemos una fracción equivalente a la primera, en la que ha desaparecido la indeterminación.

Ejemplo 9: Calcular el valor numérico de la fracción; $\dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2x - 3}$ cuando $x = -1$.

Sustituimos la x por su valor.

$$\frac{(-1)^2 + 6.(-1) + 5}{(-1)^2 - 2.(-1) - 3} = \frac{1 - 6 + 5}{1 + 2 - 3} = \frac{0}{0} \qquad \text{(Indeterminación)}$$

Factoricemos ambos polinomios.

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

Sustituimos en la fracción y simplificamos.

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x + 5)(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)} = \frac{x + 5}{x - 3}$$

Volvemos a sustituir la x por su valor, -1.

$$\frac{x + 5}{x - 3} = \frac{-1 + 5}{-1 - 3} = \frac{4}{-4} = \underline{-1}$$

Este es el verdadero valor de la fracción, una vez eliminada la indeterminación.

EJERCICIOS DEL TEMA 8

Calcular el valor numérico de las siguientes fracciones algebraicas.

1.8: $\dfrac{3a^3b + 5bca - 4b^2}{6bc^2 - 4ab^2c}$ para $a = -2$, $b = 3$ y $c = 5$

2.8: $\dfrac{3xy^2 - 2(x - y)^2 + 4x^2y}{1 - x^3 + 34x + y^2 - 2y}$ para $x = 2$ e $y = -3$

3.8: $\dfrac{x^3 - y^3 - 2x(1 - y)}{x^4 + 2xy - 8}$ para $x = 3$ e $y = -1$

4.8: $\dfrac{3x^3 - 2(y - x^3) + (x - y)(x + y)}{5 + 3x - 2y^3 - (x - y)^2}$ para $x = -1$ e $y = 3$

Hallar las fracciones irreducibles de.

5.8: $\dfrac{27a^2b^2c^3d^4}{63a^3b^3c^4d^5}$

6.8: $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x^3 + 5x^2 - x - 5}$

7.8: $\dfrac{abx - bx^2}{acx - cx^2}$

8.8: $\dfrac{a^3 + a^2 + a - 3}{a^3 + 3a^2 + 5a + 3}$

9.8: $\dfrac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$

10.8: $\dfrac{m + n}{(m + n)^2 + n + m}$

11.8: $\dfrac{x^2 - (a - b)x - ab}{x^2 - (a + c)x + ac}$

12.8: $\dfrac{x^6 - 36}{x^6 - 12x^3 + 36}$

13.8: $\dfrac{x^2 - x - 20}{x^2 + x - 12}$

14.8: $\dfrac{1 - 216a^3}{x - 4y - 6ax + 24ay}$

15.8: $\dfrac{(a + b)^2 - (c + d)^2}{(a + c)^2 - (b + d)^2}$

16.8: $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 - x - 6}$

Hallar el verdadero valor de las fracciones.

17.8: $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ para $x = 3$

18.8: $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 8x + 7}$ para $x = 1$

19.8: $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ para $x = 2$

20.8: $\dfrac{a^2 - 7a + 12}{a^3 - 4a^2 + a + 6}$ para $a = 3$

21.8: $\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$ para $x = 1$

22.8: $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 3x + 2}$ para $x = 1$

23.8: $\dfrac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12}{x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6}$ $\rightarrow$ a) Para $x = 1$; b) " $x = 2$; c) " $x = 3$

24.8: $\dfrac{2x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 4x - 4}{3x^3 + 14x^2 + 20x + 8}$ $\rightarrow$ para $x = -2$

Realizar las siguientes operaciones, simplificando si es posible, el resultado.

25.8: $\dfrac{1}{1-2x} - \dfrac{2x}{1-4x^2}$

26.8: $\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a-b}$

27.8: $\dfrac{3a}{x+y} - \dfrac{3ax}{x^2-y^2}$

28.8: $\dfrac{x}{x^2-y^2} - \dfrac{y}{y^2-x^2}$

29.8: $\dfrac{4}{x-4} - \dfrac{16+3x}{x^2-16}$

30.8: $\dfrac{3a}{a-1} - 6 + \dfrac{3a}{a+1}$

31.8: $\dfrac{3a}{9a^2-4b^2} - \dfrac{1}{3a+2b}$

32.8: $\dfrac{2}{3} - \dfrac{x}{x-y} + \dfrac{y}{x+y}$

33.8: $\dfrac{2y}{(x-2y)^2} + \dfrac{1}{x-2y}$

34.8: $\dfrac{x}{x-y} - \dfrac{y}{x+y} + \dfrac{2y^2}{x^2-y^2}$

35.8: $\dfrac{x+2y}{x-2y} - \dfrac{x-2y}{x+2y}$

36.8: $\dfrac{a+1}{a-1} + \dfrac{a-1}{a+1} - \dfrac{2(a^2+1)}{a^2-1}$

37.8: $\dfrac{3}{x-b} + \dfrac{4b}{(x-b)^2} - \dfrac{5b}{(x-b)^3}$

38.8: $\dfrac{x-2}{x^2-3x+2} + \dfrac{1}{x^2-1} + \dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$

39.8: $\dfrac{a^2-b^2}{2x} \cdot \dfrac{4x^3}{a^4-b^4}$

40.8: $\dfrac{x}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x} \cdot \dfrac{x}{x+1}$

41.8: $\dfrac{a^2-b^2}{ax} \cdot \dfrac{a^2+b^2}{a^2x^2}$

42.8: $\dfrac{6a}{a+1} \cdot \dfrac{a^2-1}{3a^2}$

43.8: $\dfrac{a^2-b^2}{x+y} : \dfrac{a-b}{x^2-y^2}$

44.8: $(a^4 - \dfrac{1}{a^2}) : (a^2 + \dfrac{1}{a})$

45.8: $(x^2 - a + \dfrac{2a^2}{x^2+a}) \cdot (x^2+a)$

46.8: $\dfrac{x^2-4a^2}{ax+2a^2} \cdot \dfrac{2a}{x-2a}$

47.8: $\dfrac{x^2-y^2}{a+b} : \dfrac{(x+y)^2}{a^2-b^2}$

48.8: $\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2} : \dfrac{a-b}{4a+4b}$

49.8: $\dfrac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x+y} : \dfrac{x-y}{x+y}$

50.8: $\dfrac{a^2+ab+ax+bx}{a^2-ab-ax+bx} : \dfrac{a^2-x^2}{a^2-b^2}$

51.8: $(x - \dfrac{y^2}{x}) \cdot (\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}) : (\dfrac{x^4-y^4}{xy})$

52.8: $(x^2 - x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}) : (x - 1 + \dfrac{1}{x})$

53.8: $(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}) : (\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b})$

54.8: $(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1}) : (\dfrac{n^2+4n-1}{n^2-1} - 1)$