# TEMA 3

# ECUACION DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

## 1. DEFINICIONES ELEMENTALES

Identidad es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se cumple para todos los valores numéricos de la expresión.

Por ejemplo, la igualdad:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

es una identidad válida para cualquier valor que le demos a las letras que la forman.

Ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que sólo se cumple para determinados valores de la parte literal.

Por ejemplo, la igualdad:

$$2x - 3 = x + 1$$

Tan sólo se cumple cuando la $x$ toma el valor 4.

Para cualquier otro valor que le diéramos a la $x$, no se cumpliría la igualdad anterior.

En toda ecuación, a cada una de las expresiones algebraicas situadas a sendos lados del signo igual se les llama miembros; el situado a la izquierda del signo igual es el primer miembro y el situado a la derecha el segundo miembro.

En una ecuación, llamamos incógnitas a cada una de las letras que componen la igualdad. En el ejemplo anterior, la incógnita es la $x$.

Solución de una ecuación es el valor o valores numéricos que, sustituidos en el lugar de las incógnitas hacen que se cumpla la igualdad.

NOTA: Una incógnita puede tener varias soluciones en una misma ecuación.

Así, la ecuación:

$$x^2 = 16$$

Admite como soluciones los valores; +4 y -4.

Dos ecuaciones decimos que son equivalentes cuando poseen las mismas soluciones para las mismas incógnitas.

Por ejemplo, las ecuaciones:

$$5x - 3 = 2x + 18$$
$$3x = 21$$

Son equivalentes, pues ambas comparten la misma solución; $x = 7$.

Para que dos ecuaciones sean semejantes, es necesario que compartan TODAS las soluciones posibles.

Así, las ecuaciones:

$$x^2 = 25$$
$$8x - 14 = 27$$

NO son semejantes, pues aunque ambas comparten la solución $x = 5$, no comparten, en cambio, el valor $\underline{-5}$ que es solución de la 1ª ecuación, pero no de la 2ª.

Resolver una ecuación es encontrar los valores numéricos o algebraicos de las incógnitas que son solución de esa ecuación.

## 2. TIPOS DE ECUACIONES

Atendiendo al número de incógnitas, las ecuaciones pueden ser de:

- una incógnita.
- dos "
- tres "

...........
etc.

Atendiendo al grado, las ecuaciones pueden ser de:

- 1er grado, si el exponente de la incógnita es 1.
- 2º " , " " " " " " " 2.
- 3er " , " " " " " " " 3.

..................
etc.

Una ecuación es fraccionaria cuando la incógnita aparece en el denominador de alguna fracción. Si la incógnita no aparece en el denominador decimos que es entera.

Una ecuación es irracional cuando la incógnita aparece en el radicando de alguna raíz. En caso contrario, decimos que es racional.

Ejemplos:

$\frac{4x}{3} - \frac{x}{2} = 5$; Ecuación entera, racional, de primer grado, con una incógnita.

$x - \sqrt{x - 3} = y$; Ecuación entera, irracional, primer grado y dos incógnitas.

$8x^2 - 1 = 2x + 2$; Ecuación entera, racional, de segundo grado y una incógnita.

$\frac{4(x - 1)}{x + 7} = - \frac{3}{5}$; Ecuación fraccionaria, racional, de primer grado y 1 incóg.

OBSERVACION: Antes de aventurar el grado de una ecuación, debemos transformarla adecuadamente al modo entero y racional, de lo contrario, podemos caer en un error al determinar su grado.

Por ejemplo, la ecuación:

$$x^2 = \frac{8}{x}$$

Es fraccionaria y , aparentemente, de 2º grado, pero al quitar denominadores se transforma en.

$$x^3 = 8$$

Claramente, una ecuación de tercer grado.

De igual forma, la ecuación irracional.

$$\sqrt{x - 1} = x - 7$$

Para determinar su grado, debemos transformarla, elevando al cuadrado ambos miembros.

$$(\sqrt{x - 1})^2 = (x - 7)^2$$

$$x - 1 = x^2 - 14x + 49$$

Que es una ecuación de 2º grado.

## 3. PROPIEDADES DE LAS ECUACIONES

Para trabajar con las ecuaciones y concretamente, para resolverlas - es necesario modificar y transformar el aspecto de la ecuación, a fin de poder despejar cómodamente la incógnita.

Todas estas transformaciones se basan en unas sencillas propiedades que vamos a enunciar a continuación.

1ª Propiedad: "Dada una ecuación, si sumamos o restamos a ambos miembros de la ecuación una misma cantidad numérica o una misma expresión algebraica, obtenemos una ecuación equivalente a la primera".

Corolario 1: "Todo término de una ecuación puede cambiar de miembro sin más que cambiarle su signo".

Efectivamente, sea la ecuación.

$$x + 12 = 4$$

Por aplicación de la 1ª propiedad, restemos el valor 12 en los dos - miembros de la igualdad.

$$x + \underbrace{12 - 12}_{0} = 4 - 12$$

$$x = 4 - 12$$

Obsérvese que el término +12 ha cambiado de miembro y de signo.

La transposición de términos es un método muy utilizado en la resolución de ecuaciones. Normalmente, el primer paso que se da a la hora de resolver una ecuación de primer grado es el de separar los términos que llevan la - incógnita situándolos a la izquierda del signo igual delos términos independientes, que situaremos a la derecha del signo igual.

Corolario 2: "Si en una ecuación cambiamos el signo a TODOS sus términos, resulta otra ecuación equivalente a la primera".

Esta propiedad la utilizamos cuando el término de la incógnita, una vez reducidos los términos semejantes, tiene signo negativo y deseamos cambiarlo a positivo.

Por ejemplo, si deseamos resolver la ecuación.

$$-6x + 5x = 12$$

$$-x = 12$$

Cambiamos el signo a todos los términos; con lo cual obtenemos.

$$x = -12$$

Corolario 3: "Si en una ecuación intercambiamos TODOS los términos del primer miembro al segundo miembro, y viceversa, sin cambiarles su signo, obtenemos una ecuación equivalente a la primera".

Esto es equivalente a afirmar que en una ecuación tanto da leerla de izquierda a derecha como de derecha a izquierda.

Por ejemplo, la ecuación.

$$-7 + 12 = 8x - 3x$$

Puede escribirse de la forma.

$$8x - 3x = -7 + 12$$

2ª Propiedad: "Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un número o una expresión algebraica, distinta de cero, obtenemos otra ecuación equivalente a la primera".

Esta propiedad la utilizamos para obtener el resultado de la incógnita, una vez separados los términos de la incógnita de los términos independientes.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación; $6x - 2 = x + 8$.

En primer lugar, transponemos términos.

$$6x - x = 8 + 2$$

$$5x = 10$$

Aplicando la 2ª propiedad, dividimos ambos miembros por 5 (coeficiente de la $x$).

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$$

Con lo cual obtenemos la solución de esta ecuación.

$$x = 2$$

## 4. RESOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

Basándonos en las propiedades enunciadas anteriormente, vamos a estudiar métodos prácticos para resolver este tipo de ecuaciones, valiéndonos de algunos ejemplos.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación; $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} = \frac{5}{2}$

Primero, hemos de quitar denominadores, reduciendo a denominador común.

El denominador común es el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$m.c.m.(2,3) = 6$$

$$\frac{3.3x - 2.2x}{6} = \frac{3.5}{6}$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $\underline{6}$, quitamos denominadores.

$$9x - 4x = 15$$

Reducimos términos semejantes.

$$5x = 15$$

Dividiendo ambos miembros por $\underline{5}$, obtenemos el valor de la $\underline{x}$.

$$\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$$

$$x = \underline{3}$$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación; $9 + \frac{7x - 54}{5} = 27 - x$

El mínimo común múltiplo es $\underline{5}$. Por tanto.

$$\frac{5.9 + 7x - 54}{5} = \frac{5.(27 - x)}{5}$$

Quitamos denominadores.

$$45 + 7x - 54 = 135 - 5x$$

Hacemos transposición de términos, colocando los términos en $\underline{x}$ a la izquierda y los términos independientes a la derecha.

$$7x + 5x = 135 + 54 - 45$$

Reducimos términos semejantes.

$$12x = 144$$

Dividiendo ambos miembros por $\underline{12}$, obtenemos.

$$x = \frac{144}{12} = \underline{12}$$

Ejemplo 4: Resolver la ecuación; $\frac{4 - 7x}{12} - \frac{3x + 4}{2} - \frac{3 - 19x}{8} = 0$

Hallemos el denominador común.

$m.c.m.(12,2,8) = 24$

$$\frac{2(4 - 7x) - 12(3x + 4) - 3(3 - 19x)}{24} = \frac{0}{24}$$

Quitamos denominadores y resolvemos el numerador.

$$8 - 14x - 36x - 48 - 9 + 57x = 0$$

Obsérvese el cambio de signo de todos los términos de los numeradores de la $2^a$ y $3^a$ fracción por estar afectadas del signo menos.

Transponemos términos y reducimos términos semejantes.

$$-14x - 36x + 57x = -8 + 48 + 9$$

## EJERCICIOS DEL TEMA 3

Resolver las siguientes ecuaciones:

1.3: $3x - 1 = 2(x - 1)$

2.3: $2(x + 2) - 5(2x - 3) = 3$

3.3: $x - (x + 1)(x - 3) = 4x - 8 - x^2$

4.3: $(x - 3)(x + 3) - x^2 + 4 - 3x = 7$

5.3: $x(x + 8) - x(x + 3) = 10$

6.3: $(x - 3)^2 - (x - 2)^2 = -5$

7.3: $4x - \{2x - (3x - 1)\} = 6 - 2x$

8.3: $(x - 4)(x - 3) = (x + 4)(x - 6) + 3$

9.3: $(x - 2)(x - 3) - 2(x - 4)(x - 3) = 2 - (x - 7)(x - 5)$

10.3: $(x + 3)^2 - (x - 4)^2 = (x + 2)^2 - (x - 3)^2 - 38$

11.3: $3\{x + x(x - 3) + 4\} = (3x - 2)(x + 1)$

Despejar el valor de la "x", en las siguientes ecuaciones:

12.3: $3ax - a^3 = 0$

13.3: $ax + b^2 = bx + a^2$

14.3: $x^2 + 2ax = (x - a)(x + a)$

15.3: $4(3x + 5) + 0,8(2x + 3) = 76,8$

16.3: $3ax - 2b = 3b - 2ax$

17.3: $(a + x)(a - b) = (a - x)(a + b)$

18.3: $(x + 1)(m - n) = (x - 1)(m + n)$

19.3: $(a + x)(a + 2x) = (a - 2x)(a - x)$

20.3: $ax + bx = c - dx$

21.3: $a(ax + b) = c(ax - b)$

Resolver las siguientes ecuaciones:

22.3: $\frac{2x + 13}{3} - \frac{6 - x}{4} = 1$

23.3: $\frac{x + 3}{4} + \frac{4x - 5}{5} = 5$

24.3: $\frac{6 - x}{4} - \frac{3x + 10}{3} = 4$

25.3: $\frac{3(x - 1)}{4} + \frac{5x - 7}{4} = \frac{3}{2}$

26.3: $\frac{3x + 5}{4} + \frac{x + 4}{6} = 1$

27.3: $\frac{x - 2}{2} + \frac{3x + 2}{2} = 6$

28.3: $4x + \frac{6x}{7} = \frac{3x + 2}{2} + 46$

29.3: $\frac{x + 3}{3} - \frac{5(x + 1)}{6} = \frac{2}{3}$

30.3: $x - \frac{4x}{5} + 39 = x + \frac{x}{2}$

31.3: $9 + \frac{7x - 54}{5} = 27 - x$

32.3: $\frac{23 - x}{5} + \frac{x - 1}{7} + \frac{4 - x}{4} = 3$

33.3: $\frac{5x + 7}{2} + \frac{2x + 4}{3} = \frac{3x + 9}{4} + 5$

34.3: $3x - 14 + \frac{2x + 7}{3} = \frac{5x - 7}{2}$

35.3: $x - \frac{3x}{4} + \{\frac{x - 10}{4}\}\frac{2}{3} = 450$