TEMA 3

DIVISIBILIDAD EN N

1. MULTIPLOS DE UN NUMERO NATURAL

A partir del conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, si tomamos un número natural cualquiera p y lo multiplicamos por todos los elementos del conjunto de los naturales, obtenemos el conjunto de los múltiplos de p

$$\{p.1,\ p.2,\ p.3,\ p.4,\ \dots\}$$

Como los números naturales son infinitos, el conjunto de los múltiplos de un número también lo es.

Así, los múltiplos del número 4, se obtienen haciendo.

$$4 \times 1 = 4$$
$$4 \times 2 = 8$$
$$4 \times 3 = 12$$
$$4 \times 4 = 16$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Con lo cual, el conjunto de los múltiplos de 4 = $\{4, 8, 12, 16, \dots\}$.

Para designar que un número es múltiplo de otro se utiliza la notación; $\dot{p}$, que se lee: "múltiplo de p".

Así, podemos escribir:

$25 = \dot{5}$ (25 es múltiplo de 5).

$21 = \dot{3}$ (21 " " " 3).

$169 = \dot{13}$ (169 " " "13).

2. DIVISORES DE UN NUMERO NATURAL

Si un número natural n es múltiplo de otro p, decimos que p es un divisor de n.

Es decir, si $n = \dot{p} \Rightarrow p$ es divisor de n.

Esto es fácil de ver si recordamos la definición de múltiplo. La cantidad $\underline{n}$ se obtiene al multiplicar $\underline{p}$ por un elemento cualquiera del conjunto de los naturales, por ejemplo el $\underline{k}$. Entonces podemos poner.

$$n = p \times k$$

Evidentemente, la cantidad $\underline{n}$,que es producto de $\underline{p}$ y de $\underline{k}$ será divisible al menos por $\underline{p}$. Por eso decimos que $\underline{p}$ es un divisor de $\underline{n}$.

Ejemplo 1: El 6 es un divisor del 24 porque 24 es un múltiplo de 6,(6x4 = 24).
El cociente $\frac{24}{6} = 4$ (natural).

Ejemplo 2: El 12 es un divisor del 36, porque 48 es múltiplo de 12.
(12 x 3 = 48).
El cociente $\frac{36}{12} = 3$ (natural).

Debemos recordar que en todo este tema estamos hablando del número natural y cuando decimos que un número divide a otro, nos referimos a que el cociente da otro número natural.

Para que un número divida a otro es necesario que sea igual o menor que él. Es decir, si $n = \dot{p}$ (p es divisor de n), necesariamente se ha de cumplir que.

$$p \leqslant n$$

Como el conjunto de los naturales está acotado inferiormente (el 1), resulta que el conjunto de los divisores de $\underline{n}$ es un número finito, menor o igual que $\underline{n}$.

Por tanto, dado un número natural cualquiera $\underline{n}$.
El conjunto de sus <u>múltiplos</u> es <u>infinito</u>.
" " " " <u>divisores</u> " <u>finito</u>.

El número de divisores de cada número es muy variable, pero siempre está comprendido entre 2 y $\underline{n}$, pues todo número posee necesariamente 2 divisores, al menos, la unidad y él mismo.

Ejemplo 3: El 29 posee sólo <u>dos</u> divisores; 1 y 29.
El 28 posee <u>seis</u> divisores; 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

En general, el número de divisores no es predecible de una forma inmediata y para su obtención se siguen unas reglas que estudiaremos más adelante.

3. NUMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Hemos visto que el número de divisores es muy variable. Hay cantidades que poseen un elevado número de divisores y otros con tan sólo dos divisores.

Bien, pues a estos números pobres de divisores que solamente tienen como divisores a la unidad y a él mismo los llamamos números primos.

Ejemplos de números primos; 17, 31, 5, 127, etc.

Por el contrario, un número con más de dos divisores se llama compuesto.

Ejemplos de números compuestos:

El 18 que admite como divisores; 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

El 24 " " " " ; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Para saber si un número n es primo o no debemos, o bien consultar una tabla de números primos, o bien ir probando divisores hasta que encontremos un número distinto de 1 y de n que lo divida, en cuyo caso ya es compuesto.

Observamos que la dificultad para el tratamiento de números primos reside en el hecho de la inexistencia de una regla sistemática de validez universal para saber si un número es primo o no.

Por otra parte, cuando dos o más números no tienen ningún divisor común, decimos que son primos entre si. En esta definición los números en cuestión pueden ser primos o compuestos, pues la única condición es que ningún número, a excepción del 1, que divida al primero, divida también al segundo.

Por ejemplo, los números 15 y 32 no son primos, pero sin embargo son primos entre sí.

Los divisores del 15 son; 1, 3, 5 y 15.

" " " 32 " ; 1, 2, 4, 8, 16 y 32.

Observamos que no hay ningún divisor común al 15 y al 32, a excepción del 1, por consiguiente decimos que el 15 y el 32 son primos entre sí.

Evidentemente dos números primos son siempre primos entre sí.

4. CRIBA DE ERATOSTENES

Un método para saber si un número es primo consiste en consultar una tabla de números primos. Esta tabla la podemos construir nosotros mismos, siguiendo el método ideado por Eratóstenes.

En primer lugar, escribimos el 1, y a continuación los números naturales correlativamente hasta el valor n. En nuestro ejemplo, para mayor sencillez, tomaremos n = 50.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

A continuación, partiendo del 2 vamos tachando todos los números que nos encontremos contando de dos en dos; es decir, el 4, el 6, el 8, etc. De esta forma eliminamos todos los múltiplos de 2 de la tabla.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Ahora, partiendo del 3, vamos tachando los números de tres en tres - con lo cual eliminamos los múltiplos de 3 de la tabla.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

El siguiente número con el que nos encontramos, sin tachar, en la tabla es el 5. Ahora tachamos los números de cinco en cinco para eliminar los múltiplos de 5.

El siguiente paso será repetir el proceso con el 7 para eliminar los múltiplos de 7, con lo cual llegaremos finalmente a una tabla como ésta.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

El siguiente número a tomar es el 11, pero no es necesario porque - todos los múltiplos de 11, inferiores a 50 ya están tachados. El proceso termina para un valor m igual a la parte entera de la raíz cuadrada del mayor valor (n) de la tabla. En nuestro caso, $\sqrt{50} = 7,071...$; tomando la parte entera, resulta 7, que es el último valor del cual hemos de tachar sus múltiplos.

Eliminando los números tachados de la tabla anterior nos queda finalmente la tabla de números primos inferiores a 50.

1	2	3	5
7	11	13	17
19	23	29	31
37	41	43	47

A continuación vamos a dar una tabla más completa, con todos los números primos menores que 2400.

1	113	281	463	659	863	1069	1291	1511	1733	1987	2213
2	127	283	467	661	877	1087	1297	1523	1741	1993	2221
3	131	293	479	673	881	1091	1301	1531	1747	1997	2237
5	137	307	487	677	883	1093	1303	1543	1753	1999	2239
7	139	311	491	683	887	1097	1307	1549	1759	2003	2243
11	149	313	499	691	907	1103	1319	1553	1777	2011	2251
13	151	317	503	701	911	1109	1321	1559	1783	2017	2267
17	157	331	509	709	919	1117	1327	1567	1787	2027	2269
19	163	337	521	719	929	1123	1361	1571	1789	2029	2273
23	167	347	523	727	937	1129	1367	1579	1801	2039	2281
29	173	349	541	733	941	1151	1373	1583	1811	2053	2287
31	179	353	547	739	947	1153	1381	1597	1823	2063	2293
37	181	359	557	743	953	1163	1399	1601	1831	2069	2297
41	191	367	563	751	967	1171	1409	1607	1847	2081	2309
43	193	373	569	757	971	1181	1423	1609	1861	2083	2311
47	197	379	571	761	977	1187	1427	1613	1867	2087	2333
53	199	383	577	769	983	1193	1429	1619	1871	2089	2339
59	211	389	587	773	991	1201	1433	1621	1873	2099	2341
61	223	397	593	787	997	1213	1439	1627	1879	2111	2347
67	227	401	599	797	1009	1217	1447	1637	1879	2113	2351
71	229	409	601	809	1013	1223	1451	1657	1889	2129	2357
73	233	419	607	811	1019	1229	1453	1663	1901	2131	2371
79	239	421	613	821	1021	1231	1459	1667	1907	2137	2377
83	241	431	617	823	1031	1237	1471	1669	1913	2141	2381
89	251	433	619	827	1033	1249	1481	1693	1931	2143	2383
97	257	439	631	829	1039	1259	1483	1697	1933	2153	2389
101	263	443	641	839	1049	1277	1487	1699	1949	2161	2393
103	269	449	643	853	1051	1279	1489	1709	1951	2179	2399
107	271	457	647	857	1061	1283	1493	1721	1973	2203	
109	277	461	653	859	1063	1289	1499	1723	1979	2207	

A la vista de la tabla podemos observar la aleatoriedad con que se suceden los números primos. Sin embargo conforme vamos avanzando y los números se van haciendo mayores, se observa que cada vez hay menos números primos, es decir, están más separados unos de otros. Concretamente, entre el 100 y el 200 hay 21 números primos, en cambio entre el 2100 y el 2200 tan solo hay 10. Esta tendencia se va acentuando conforme aumenta el valor de n, por lo que podríamos preguntarnos si el conjunto de los números primos está acotado superiormente. En otras palabras, si el conjunto de los números primos es finito o infinito.

Demostraremos que dado un número primo cualquiera p, siempre existe otro número primo mayor que él.

Para ello, formemos el producto de todos los números primos menores que p y añadámosle la unidad. Llamemos N al número así obtenido.

$$N = (2x3x5x7x11x..xp) + 1$$

Si N es un número primo ya hemos demostrado que existe siempre un número primo N, evidentemente mayor que p.

Si N no es primo, será compuesto, y si es compuesto admitirá algún divisor primo que no será ninguno de los comprendidos entre el paréntesis, pues de lo contrario dicho divisor, por dividir a la suma N y a uno de los sumandos del paréntesis, tendría que dividir necesariamente al otro sumando que es la unidad, lo cual es un absurdo pues no existe ningún número distinto de 1 que divida a la unidad. Por lo tanto ese divisor primo tendrá que ser mayor que cualquiera de los términos del paréntesis. Con lo cualvolvemos a demostrar la existencia de un número primo mayor que p.

En la práctica, para saber si un número es primo, debemos ir realizando las divisiones sucesivas del número dado, entre los números primos de la tabla, comenzando por el 2, siguiendo por el 3, 5, etc. hasta un valor entero inmediatamente superior a la raíz cuadrada del número dado.

Con la tabla de la página anterior podemos investigar hasta números inferiores a 5.760.000 Si ninguno de ellos es divisor del número dado podemos afirmar que dicho número es primo.

Obsérvese que a pesar de los avances de las Matemáticas no existe ningún método directo que nos permita conocer si un número es primo, salvo el engorroso y largo método de las divisiones sucesivas por los números primos menores que su raíz cuadrada.

5. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Para saber si un número es divisible por otro, existen algunos métodos que nos permiten determinarlo sin necesidad de llevar a cabo la división.

Estos criterios de divisibilidad se utilizan preferentemente para averiguar si un número es primo o no y en la simplificación de fracciones (ver apartado 5.5 de este libro), donde interesa realizar los cálculos con rapidez.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número es divisible por dos si termina en 0 ó cifra par.

Por ejemplo, el 318 es divisible por 2 porque termina en 8 (par).
" 36 " " " " " " " 6(par).
" 441 NO es divisible por 2 porque termina en 1 (impar)

Criterio de divisibilidad por 3

Un número es divisible por tres si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.

Por ejemplo, el 429 es divisible por 3 porque 4 + 2 + 9 = 15 que es un múltiplo de 3, (3 x 5 = 15).
El 6323 NO es divisible por 3 porque 6 + 3 + 2 + 3 = 14 que no es -- múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número es divisible por cuatro si sus dos últimas cifras son 00 ó bien múltiplo de 4.

Por ejemplo, el 7100 es divisible entre 4, porque las dos últimas cifras son 00.
El 34128 es divisible entre 4 pues las dos últimas cifras, 28, es un múltiplo de 4 (7 x 4 = 28).
El 4482 NO es divisible entre 4 pues el 82 no es múltiplo de 4.

Criterio de divisibilidad por 5

Todo número es divisible por cinco cuando su última cifra es un 0 ó un 5.

Por ejemplo, el 7015 es divisible por 5 pues su última cifra es un 5
" " " 1330 " " " " " " " " " " 0
" " " 5504 NO es divisible por 5.

Criterio de divisibilidad por 8

Un número es divisible por ocho si sus tres últimas cifras son 000 ó múltiplo de 8.

Criterio de divisibilidad por 9

Todo número es divisible por nueve si al sumar sus cifras obtenemos un múltiplo de 9.

Por ejemplo, el 4266 es divisible entre 9 porque 4 + 2 + 6 + 6 = 18 es un múltiplo de 9 (9 x 2 = 18).

El 3209 NO es divisible por 9 porque 3 + 2 + 0 + 9 = 14 no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Todo número cuya última cifra sea un 0, es divisible por diez.

En general, todo número que termine en uno ó más ceros es divisible por la unidad seguida de tantos ceros como tenga al final.

Por ejemplo, 208600 es divisible por 100.
900203000 es divisible por 1000
1010 es divisible por 10.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número es divisible por once, cuando la diferencia,en valor absoluto,entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar, contadas de derecha a izquierda, y las que ocupan lugar par da 0 ó múltiplo de 11.

NOTA: Para una definición de valor absoluto, consúltese la pregunta 1 del tema 4.

Por ejemplo, 3971 es divisible entre 11 porque la diferencia entre la suma de las cifras de orden par, 3 + 7 = 10, y las de orden impar, 9 + 1 = 10, da como resultado, 10 - 10 = 0.

El 80542 es divisible por 11 porque la suma de las cifras de orden impar, 8 + 5 + 2 = 15, y las de orden par, 0 + 4 = 4, da como diferencia; 15 - 4 = 11, que es evidentemente múltiplo de 11.

Ejemplo 4: Sustituir el hueco por una cifra de forma que el número resultante sea múltiplo de 3.   4 1 _ 6.

La suma de las cifras es; 4 + 1 + 6 = 11

Para que la suma de las cifras sea múltiplo de 3, caben varias soluciones.

11 + 1 = 12
11 + 4 = 15
11 + 7 = 18

La cifra a colocar en el hueco puede ser el 1, el 4 ó el 7.

Con lo cual, las soluciones pedidas son: 4 1 1 6

4 1 4 6

4 1 7 6

Ejemplo 5: ¿Qué cifra debemos situar en el hueco para que el número resultante sea múltiplo de 11?. 1 7 _ 7

La suma de las cifras de orden impar vale 7 + 7 = 14 y las de orden par 1. Restando estos valores obtenemos el valor 14 - 1 = 13.

Para que resulte múltiplo de 11, debemos colocar la cifra; 13 - 11 = 2, en el hueco.

Por tanto, la solución es; 1 7 2 7.

De todos los criterios de divisibilidad expuestos, los más usados -- son los referidos a los números primos 2, 3, 5 y 11.

Al margen de estos criterios, debemos señalar que si un número es -- múltiplo de p y ese mismo número también es múltiplo de otro q, siendo p y q primos entre sí, entonces dicho número también es múltiplo de su producto p.q

Esto es, si: $n = \dot{p}$ $\quad\quad n = \dot{(p.q)}$

$n = \dot{q}$

Por tanto, si un número, por ejemplo el 18, es múltiplo de 2 y de 3, también será múltiplo de su producto 2.3 = 6.

$18 = 2$ $\quad\quad 18 = 6$

$18 = 3$

A partir de aquí podemos enunciar todos los criterios de divisibilidad que se nos ocurran para números compuestos.

Por ejemplo:

Un número es múltiplo de 6 cuando lo sea de 2 y de 3
" " " " " 22 " " " " 2 " " 11
" " " " " 10 " " " " 2 " " 5

De la misma forma.

Un número que sea divisible por 4 y por 5 lo será también por 20
" " " " " " 2 " " 9 " " " " 18

Esta regla es de particular interés a la hora de simplificar fracciones con mayor rapidez, como veremos en el apartado 5.5 de este libro.

6. DESCOMPOSICION DE UN NUMERO EN FACTORES PRIMOS

Dado un número compuesto, podemos descomponerlo en producto de sus divisores, de forma que obtengamos el número original.

La descomposición de un número en factores no es única, aumentando el número de descomposiciones posibles, al aumentar el número de sus divisores.

Por ejemplo, el número 36, cuyos divisores son; 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 puede descomponerse según:

$1 \times 36 = 36$	$9 \times 2 \times 2 = 36$
$2 \times 18 = 36$	$6 \times 2 \times 3 = 36$
$3 \times 12 = 36$	$1 \times 4 \times 9 = 36$
$6 \times 6 = 36$	. . . . etc.

De todas las descomposiciones en factores posibles, hay una que resulta única; la descomposición según sus divisores primos. En este caso, los únicos divisores primos que posee el 36 son el 2 y el 3, por tanto, combinándolos adecuadamente, resulta:

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

Y utilizando la notación exponencial que resulta más práctica.

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

El método general que se sigue para descomponer un número en producto de sus divisores primos es el siguiente:

1º) Se escribe el número y una raya vertical a su derecha.

$$\begin{array}{r|l} 36 & \\ & \\ & \\ \end{array}$$

2º) Con la tabla de números primos delante, ver apartado 4 de este tema, se comienza por el 2 y se prueba si es divisor del 36. En caso afirmativo se coloca el divisor, 2, a la derecha de la raya y el resultado del cociente 36 : 2 = 18, a la izquierda, debajo del 36

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & \\ \end{array}$$

3º) Se toma ahora el cociente, el 18, y se prueba de nuevo con la tabla de números primos, comenzando de nuevo por el 2.

36	2
18	2
9	

Como ahora el 9 no es divisible por 2, se prueba el siguiente número de la tabla, el 3.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Al obtener como último cociente el 1, finalizamos el proceso. Los -- factores primos buscados son los situados en columna, a la derecha de la línea vertical. Por tanto escribimos.

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$$

Esta descomposición es única, aunque puede variarse obviamente el orden de los factores.

Ejemplo 6: Descomponer en factores el número 700.

700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

$700 = 2^2.5^2.7$

7. OBTENCION DE LOS DIVISORES DE UN NUMERO

Un problema muy corriente que se puede presentar es el de obtener TODOS los divisores de un número dado n.

La primera idea que puede tener un alumno para solucionarlo es la - de ir probando por el conjunto de los naturales ordenadamente, desde el 2 hasta el valor n. Sin embargo, a poco que aumente el orden de magnitud de n, el proceso se hace inútilmente largo y poco resolutivo.

Existe un método sistemático para resolver este problema directamente y que vamos a explicar valiéndonos de un ejemplo.

Ejemplo 7: Obtener todos los divisores del número 360.

1º) Descomponemos el número dado, en producto de sus divisores primos, siguiendo el método indicado en la pregunta anterior.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5$$

2º) Se toma el primer factor primo, el 2, y escribimos en fila la unidad seguida de las potencias de 2, desde la de orden 1, hasta el orden indicado por el exponente, en este caso, hasta el orden 3.

$$1 \qquad 2^1 = 2 \qquad 2^2 = 4 \qquad 2^3 = 8$$

3º) Se toma el siguiente factor primo, el 3, y se escriben en columna, a la izquierda, las potencias de 3, desde la de orden 1 hasta el orden indicado por el exponente, en este caso, hasta el orden 2.

	1	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^1 = 3$				
$3^2 = 9$				

4º) Se multiplica cada una de las potencias de 3 por las potencias de 2 y se van colocando ordenadamente en la tabla.

NOTA: En la práctica no se indica la operación de elevar a los exponentes correspondientes, sino que se pone el resultado directamente. A partir de ahora vamos a proceder así.

	1	2	4	8
3	3	6	12	24
9	9	18	36	72

5º) Se toma el siguiente factor primo, el 5, se colocan sus potencias, en columna, a la izquierda, debajo de las del 3. En este caso sólo $5^1 = 5$ y multiplicamos este valor por TODOS los que hubiera anteriormente en la tabla y se van colocando ordenadamente, debajo de los que ya hubiera.

	1	2	4	8
3	3	6	12	24
9	9	18	36	72
5	5	10	20	40
	15	30	60	120
	45	90	180	360

Los números situados en esta tabla representan el conjunto de todos los divisores del número 360.

El número de divisores de un número se puede obtener al multiplicar entre sí los exponentes de sus divisores primos, aumentados en una unidad.

Ejemplo 8: ¿Cuántos divisores tiene el número 3744?.

En primer lugar realicemos la descomposición en sus factores primos

$$\begin{array}{r|l} 3744 & 2 \\ 1872 & 2 \\ 936 & 2 \\ 468 & 2 \\ 234 & 2 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$3744 = 2^5 . 3^2 . 13^1$$

Seguidamente, tomamos los exponentes de los factores primos, los aumentamos en una unidad y los multiplicamos entre sí.

$$(5 + 1).(2 + 1).(1 + 1)$$

$$6.3.2 = \underline{36}$$

Por tanto, el número 3744 tiene exactamente 36 divisores.

Ejemplo 9: ¿Cuántos divisores tiene el número 675?.
Hallarlos y ordenarlos.

Comenzamos por la descomposición factorial.

$$\begin{array}{r|l} 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 675 = 3^3 . 5^2$$

Tomemos los exponentes del 3 y del 5, los aumentamos en 1 unidad y los multiplicamos.

$$(3 + 1).(2 + 1) = 4.3 = \underline{12}$$

El número 675 tiene 12 divisores.

Confeccionemos la tabla de sus divisores.

	1	3	9	27
5	5	15	45	135
25	25	75	225	675

Y ordenándolos resulta:

1, 3, 5, 9, 12, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675

8. MAXIMO COMUN DIVISOR

Sean los números 150 y 108, tomados como ejemplo.

Hallemos, por separado, los divisores de estos dos números y ordenémoslos según el método expuesto en el apartado anterior.

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$150 = 2.3.5^2$$

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$108 = 2^2.3^3$$

Una vez realizada la descomposición factorial obtengamos los divisores.

	1	2
3	3	6
5	5	10
	15	30
25	25	50
	75	150

	1	2	4
3	3	6	12
9	9	18	36
27	27	54	108

Divisores del 150: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150
Divisores del 108: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108

Si nos fijamos en las dos filas de divisores, observaremos que hay algunos que son comunes al 150 y al 108.

La lista de los divisores comunes es:

1, 2, 3 y 6

El mayor de todos ellos, el <u>6</u>, recibe el nombre de <u>máximo común divisor</u> de 150 y 108. En general, el MAXIMO COMUN DIVISOR de dos o más números es el mayor de todos los divisores que son comunes a todos los números dados.

Para calcular el máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números, podemos utilizar el método explicado anteriormente, pero resulta más eficaz seguir los siguientes pasos:

Ejemplo 10: Hallar el m.c.d. de 200, 810 y 1125.

1º) Se halla la descomposición de los números en sus divisores primos.

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$200 = 2^3.5^2$

810	2
405	3
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$810 = 2.3^3.5$

1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$1125 = 3^2.5^3$

2º) Fijándonos en la descomposición anterior, tomamos aquellos divisores primos que sean COMUNES a todos los números, afectados del MENOR exponente con que aparezcan y los multiplicamos entre sí.

$$200 = 2^3.5^2$$
$$810 = 2.3^3.5$$
$$1125 = 3^2.5^3$$

En nuestro caso, el único divisor primo común a los <u>tres</u> es el 5 y el menor exponente el 1. Por tanto.

$$\text{m.c.d.}(200,810,1125) = 5^1 = \underline{5}$$

Si los números en cuestión no presentan ningún factor común, se dice que son primos entre sí (ver apartado 3 de este tema) y su máximo y único divisor común es la unidad.

Por consiguiente cuando el máximo común divisor de dos o más números es <u>1</u>, dichos números son primos entre sí.

9 MINIMO COMUN MULTIPLO

Tomemos dos números cualesquiera, por ejemplo el 50 y el 60.

Escribamos ordenadamente, los primeros múltiplos de ambos números.

Múltiplos de 50: 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, ...
" " 60: 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, ...

Observamos que aparecen ciertas cantidades repetidas en ambas filas, el 300, el 600, ...

Estos múltiplo son comunes al 50 y al 60 y resulta fácil comprobar - que el número de múltiplos comunes es infinito.

De todos los infinitos múltiplos, el más sencillo de todos es el menor de todos ellos, al cual llamaremos MINIMO COMUN MULTIPLO. En nuestro ejemplo vale 300.

Para obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de varias cantidades de una forma sistemática, seguiremos los siguientes pasos.

Ejemplo 11: Hallar el mínimo común múltiplo de 490, 525 y 2744.

1º) Realizamos la descomposición de los 3 números en sus divisores primos.

$$\begin{array}{r|l} 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2744 & 2 \\ 1372 & 2 \\ 686 & 2 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$490 = 2.5.7^2$ $525 = 3.5^2.7$ $2744=2^3.7^3$

2º) Fijándonos en la descomposición anterior, tomamos TODOS los -- factores primos que aparezcan, en nuestro caso 2, 3, 5 y 7, los elevamos a los MAYORES exponentes con que aparezcan y los multiplicamos entre sí

$$490 = 2.5.7^2$$
$$525 = 3.5^2.7$$
$$2744 = 2^3.7^3$$

m.c.m. (490, 525, 2744) = $2^3.5^2.7^3 = 8.25.343 = \underline{68600}$

El resultado anterior indica que, de los infinitos múltiplos comunes al 490, al 525 y al 2744, el menor de todos ellos es el 68600.

Cuando los números dados no presentan ningún factor primo común, su mínimo común múltiplo equivale al producto de todos ellos.

El máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de DOS números están relacionados entre sí por la siguiente relación.

$$\boxed{\text{m.c.d.}(a,b) \times \text{m.c.m.}(a,b) = a \times b}$$

Es decir, el producto del m.c.d. y el m.c.m. de dos números es igual al producto de esos dos números.

Esta propiedad deja de cumplirse para más de dos números.

Ejemplo 12: Comprobar el resultado anterior con los números 24 y 81.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24 = 2^3.3 \\ 81 = 3^4 \end{array}$$

$$\text{m.c.d.}(24,81) = \underline{3}$$
$$\text{m.c.m.}(24,81) = 2^3.3^4 = 8.81 = \underline{648}$$

$$\text{m.c.d.}\ (24,81) \times \text{m.c.m.}(24,81) = 3.648 = \underline{1944}$$
$$24.81 = \underline{1944} \qquad \text{COINCIDEN}$$

10. ALGORITMO DE EUCLIDES

El algoritmo de Euclides es un método para hallar el máximo común divisor de dos números sin necesidad de realizar la descomposición en sus factores primos.

Este método resulta particularmente útil, cuando los divisores primos son difíciles de hallar o no tenemos la seguridad de si el número es primo o compuesto.

Ejemplo 13: Hallar por el algoritmo de Euclides el máximo común divisor de 225 y 432.

1º) Construimos una tabla como la de la figura y en la fila central situamos los dos números ordenadamente, primero el mayor y a continuación el menor.

432	225	

2º) Efectuamos el cociente entre estas dos cantidades.

4 3 2	2 2 5
2 0 7	1

3º) Situamos el valor del cociente en la casilla superior y el resto en la fila inferior, a la izquierda, según se observa en la figura.

	1	
432	225	
207		

4º) Ahora situamos el resto,207, en la fila central, a la derecha del antiguo divisor,225.Con lo cual, el <u>nuevo dividendo</u> es el <u>antiguo divisor</u> y el <u>nuevo divisor</u> el <u>resto anterior</u>.

	1		
432	225	207	
207			

5º) Efectuamos el cociente entre esas dos cantidades y vamos repitiendo los pasos anteriores hasta llegar a un resto <u>cero</u>, en que finalizamos el proceso. La última cantidad de la fila central, es decir, el último divisor,es el máximo común divisor pedido.

	1	1	11	2	
432	225	207	18	9	
207	18	9	0		

Si nos pidieran el m.c.d. de más de dos números, se halla el m.c.d. de dos de ellos y el resultado se combina con el tercer número y así sucesivamente.

Ejemplo 14: Hallar por Euclides el m.c.d. de 12250, 1890 y 1120.

Tomamos las dos primeras cantidades y hallamos su m.c.d.

	6	2	13	
12250	1890	910	70	
910	70	0		

	16	
1120	70	
0		

Por tanto, m.c.d.(12250,1890,1120) = <u>70</u>

EJERCICIOS DEL TEMA 3

1.3.- ¿Cuál es el menor múltiplo de 32?. ¿Y su mayor divisor?.

2.3.- ¿Cuál es el mayor múltiplo de 32?. ¿Y su menor divisor?.

3.3.- Los múltiplos de 12, ¿lo son de 4?. ¿Y los de 4, lo son de 12?.

4.3.- Escribir todos los múltiplos de 125 menores de 1000.

5.3.- Escribir el menor número de cinco cifras que sea múltiplo de 9 y de 11.

6.3.- ¿Por qué todos los números de 4 cifras iguales son compuestos.

7.3.- ¿Cómo justificas que el 3, no divida a ninguna potencia de 10?.

8.3.- ¿Qué condición ha de cumplir un número para que sea divisible por 15?

9.3.- ¿Por qué todo número de 6 cifras, tal que las 3 primera sean iguales a las tres últimas es compuesto?.
¿Cuáles son siempre sus divisores?.

10.3.- Dados los números; 84, 231, 1278, 92506 y 111222333.
Indicar cuáles de ellos son múltiplos de 3 y cuáles de 9.

11.3.- Indicar sin efectuar la división, cuáles de los números; 517, 862, 2756 67000 son divisibles por 2, cuáles por 4 y cuáles por 8.

12.3.- Sustituir los huecos por cifras en 85_5_23_, de manera que resulte un - número divisible:
a) por 2
b) por 3
c) por 11
d) por 6
e) por 22
f) por 33

13.3.- Sustituir los huecos por cifras en 57_2_, de modo que resulte un número múltiplo:
a) de 3
b) de 5
c) de 15

14.3.- ¿Cómo podríamos averiguar si un número es divisible por 33?.
Aplíquese a un ejemplo.

15.3.- Hallar los números comprendidos entre 501 y 550 que sean a la vez divisibles por 3 y por 4.

16.3.- Sustituir los huecos por cifras en 285__, de manera que el número que - resulte sea a la vez múltiplo de 4 y de 9.
Dar tres soluciones.

17.3.- ¿Cuantos divisores, al menos, ha de tener un número compuesto?.

18.3.- Dos números consecutivos, ¿pueden ser primos?. ¿Por qué?.

Descomponer en factores primos los números:

19.3.- a) 900
b) 1925
c) 1008
d) 11913

20.3.- a) 111111
b) 323640
c) 316
d) 1040

21.3.- a) 1404
b) 873425
c) 16443
d) 15147

22.3.- a) 147231 c) 1188
b) 49896 d) 14700

23.3.- Descomponer el número 540 de todos los modos posibles, en dos factores primos entre sí.

24.3.- ¿Cómo demostrarías que el número 347 es primo, aparte de consultar la tabla de números primos?.

25.3.- Construir la tabla de números primos inferiores a 200.
¿En qué momento detendrás la operación de tachar números.
NOTA: Hay que construir la tabla según el método de Erastótenes, no es suficiente con copiarla del libro.

Hallar el máximo común divisor de los números:

26.3.- a) 25, 45, 75 b) 150, 200, 250

27.3.- a) 18, 27, 30 b) 15, 36, 21

28.3.- a) 35, 42, 70 b) 128, 72, 156

29.3.- a) 1080, 1800 b) 460, 770, 2002

30.3.- a) 840, 3240 b) 5929, 1185, 17787

31.3.- Averiguar si son primos entre sí, los números:
a) 221, 263 c) 554, 1086, 7542
b) 299, 461

Hallar el mínimo común múltiplo de los números:

32.3.- a) 121, 605, 847 b) 72, 120, 168

33.3.- a) 35, 135, 175 b) 7, 45, 175

34.3.- a) 60, 70, 72 b) 16, 24, 40

35.3.- a) 560, 759, 1771 b) 15, 28, 44, 115

Hallar todos los divisores de:

36.3.- a) 72 c) 120
b) 400 d) 360

37.3.- a) 1080 c) 4221
b) 3232 d) 5225

38.3.- Hallar todos los divisores comunes a:
a) 140, 35 c) 18, 72, 90
b) 75, 130 d) 420, 1620, 2100
NOTA: Para resolver este ejercicio, basta con hallar todos los divisores del máximo común divisor de los números.

39.3.- Una sala de 108 metros de larga y 8 metros de ancha quiere embaldosarse con baldosas cuadradas, de la mayor superficie posible.
¿Cuántas baldosas se necesitarán?.
¿Cuál es el tamaño de cada baldosa?.

40.3.- Tres cintas de distintos colores de 184, 165 y 286 cm. de longitud, se quieren dividir en trozos iguales de la mayor longitud posible, sin que sobre nada.
¿Cuál ha de ser la longitud de cada trozo de cinta?.
¿Cuañtos trozos se obtiene de cada una de las cintas?.

41.3.- Tres ciclistas recorren una pista circular. El primero tarda 12 minutos en dar una vuelta, el segundo 15 minutos y el tercero 18 minutos. Si -- los tres salen al mismo tiempo. ¿Al cabo de cuánto tiempo volverán los tres a encontrarse en el punto de partida?.

42.3.- Un hombre tiene un campo triangular cuyos lados miden 96 m, 84 m y 104 m. Desea cercar este campo con vallas iguales de la mayor longitud posible.
¿Cuántas vallas empleará?.
¿Cuál será la longitud de cada valla?.

43.3.- Se tienen 375 bombillas y se desea empaquetarlas en cajas de distinto - tamaño, sin que sobre ninguna.
Hallar todas las formas posibles de empaquetamiento.

44.3.- Tres autobuses salen a las 8 de la mañana de la estación, con destinos diferentes. El primero realiza su trayecto en 40 minutos, el segundo en $\frac{1}{2}$ hora y el tercero en 1 hora.
Suponiendo que están circulando ininterrumpidamente hasta las 2 de la - tarde. ¿A qué horas volverán a coincidir los tres en la estación?.
¿Cuántas veces coinciden?.

45.3.- Hallar por el algoritmo de Euclides el máximo común divisor de:

a) 1000, 350, 725
b) 300, 1750
c) 5576, 71145
d) 144, 80, 42