TEMA 4

OPERACIONES EN Z

1. SUMA Y RESTA DE NUMEROS ENTEROS

En el tema anterior se han estudiado los numeros naturales, los cuales resultan insuficientes para resolver ciertos cálculos matemáticos. Por ejemplo, la sencilla operación $4 - 6 =$? no tendría respuesta en el conjunto de los números naturales. Al ampliar con los negativos formamos el conjunto de los enteros (Z) cuya representación puede visualizarse como.

$$\cdots \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots$$

Ahora sí que disponemos de un elemento perteneciente a los enteros que sea solución de la operación anterior; $4 - 6 = -2$

Definimos el <u>módulo</u> o <u>valor absoluto</u> de un número entero como el valor de dicho número prescindiendo de su signo. Se representa por medio de dos rayitas verticales situadas a la izquierda y a la derecha del número.

$|14|$ se lee "módulo de 14" y su valor es 14

$|-31|$ se lee "módulo de -31" y su valor es 31.

$|-1| = 1$

$|29| = 29$

La aparición de números negativos obliga a replantearse las operaciones de suma y resta aplicadas a los naturales.

Con dos números enteros pueden plantearse los siguientes casos.

1. <u>Los números tienen igual signo</u>

   a) Los dos números son positivos.

$$5 + 7 = 12$$

   b) Los dos números son negativos.

$$-3 - 8 = -11$$

En ambos casos; SE SUMAN LOS MODULOS Y SE DEJA EL SIGNO QUE TUVIERAN.

2. Los números tienen distinto signo

$$-4 + 11 = 7$$
$$5 - 8 = -3$$

En este caso; SE RESTA DEL MODULO DEL MAYOR EL MODULO DEL MENOR Y SE PONE EL SIGNO DEL MAYOR.

En el primer ejemplo, el de mayor módulo es el 11 que es positivo, - luego se pone como signo del resultado (+).

En el segundo ejemplo como el signo de la cantidad de mayor módulo - (8) es negativo, se pone como signo del resultado (-).

Normalmente disponemos de más de dos cantidades a sumar o restar y - entonces utilizaremos uno de los dos métodos siguientes.

Ejemplo 1: Realizar la operación.

$$4 - 7 + 5 - 12 - 17 + 25 + 6$$

Tomamos las dos primeras cantidades y hallamos su resultado según el método estudiado.

$$4 - 7 = -3$$

El resultado se combina con el tercer número.

$$-3 + 5 = 2$$

Este nuevo resultado se combina con el cuarto número y así sucesivamente.

$$2 - 12 = -10$$
$$-10 - 17 = -27$$
$$-27 + 25 = -2$$
$$-2 + 6 = \underline{4}$$

Este método puede realizarse mentalmente, con mayor rapidez, sin necesidad de escribir las operaciones paso a paso.

El otro método consiste en agrupar las cantidades positivas y negativas por separado, para restarlas al final.

Ejemplo 2: Efectuar la siguiente operación.

$$2 + 17 - 21 + 13 - 9 + 1 - 29 + 7$$

Tomamos las cantidades positivas y las sumamos.

$$2 + 17 + 13 + 1 + 7 = 40$$

Ahora las negativas.

$$-21 - 9 - 29 = -59$$

Finalmente queda.

$$40 - 59 = \underline{-19}$$

2. PRODUCTO Y COCIENTE DE DOS NUMEROS ENTEROS

NOTA: Como estamos trabajando con números enteros, las divisiones de los ejemplos están preparadas para que aparezcan números enteros como cociente. En el próximo tema ya se habla del número racional, pero como las propiedades que enunciemos aquí son válidas para los racionales he optado por incluirlas en el tema.

Para multiplicar o dividir dos números enteros, se multiplican o dividen los módulos, y el signo de resultado se coloca según las reglas.

Si los dos números tienen IGUAL SIGNO el resultado es POSITIVO (+)
" " " " " DISTINTO SIGNO el resultado es NEGATIVO (-)

Ejemplos:	$4 \times 3 = 12$	$72 : 3 = 24$
	$-5 \times -6 = 30$	$-18 : -2 = 9$
	$-2 \times 7 = -14$	$-42 : 7 = -6$
	$9 \times -8 = -72$	$8 : -2 = -4$

En el caso de un producto, si tenemos más de dos factores, podríamos obtener el signo del resultado aplicando sucesivamente la regla anterior a parejas de números. Sin embargo resulta mucho más rápido seguir la siguiente regla.

Se cuentan el total de signos negativos (-) en el producto.
Si el resultado es un número IMPAR, el resultado es NEGATIVO (-).
" " " " " " PAR " " " POSITIVO (+).

Ejemplo 3: Calcular el valor del producto.

$(-1).6.(-3).4.2.(-2).(-4) =$

Como hay 4 signos menos (nº par) el resultado es positivo.

$(-1).6.(-3).4.2.(-2).(-4) = \underline{1.152}$

Ejemplo 4: Resolver el siguiente producto.

$4.(-3).(-1).2.(-3).1 =$

Aquí tenemos tres factores negativos (impar), luego el resultado es negativo.

$$4.(-3).(-1).2.(-3).1 = \underline{-72}$$

3. JERARQUIA ALGEBRAICA

En las operaciones con números enteros es frecuente la utilización de los signos de sumar, restar, multiplicar y dividir en una misma ecuación.-- El problema aparece porque, en general, el orden en que se escriben las operaciones no siempre coincide con el orden en el que deben ser efectuadas.

Por ejemplo, si nos dicen; Resolver la expresión.

$$2 + 3.4$$

Un alumno podría realizar las operaciones según la siguiente secuencia.

1º) Realiza la suma: $2 + 3 = 5$

2º) Realiza el producto $5.4 = 20$

3º) Respuesta = $\underline{20}$

Este resultado está MAL, porque el orden en el que ha realizado las operaciones no es el correcto. Deberíamos haber procedido como sigue.

1º) Realizo el producto $3.4 = 12$

2º) Realizo la suma $2 + 12 = 16$

3º) Respuesta = $\underline{16}$ que es la solución CORRECTA

Llegamos a la conclusión de que las operaciones matemáticas son bastante rígidas, esto es, siguen una jerarquía u orden que no podemos alterar si no queremos correr el riesgo de errar el resultado.

El orden a seguir es el indicado en la tabla.

1º $\boxed{\text{POTENCIAS Y RAICES}}$
↓
2º $\boxed{\text{PRODUCTOS Y COCIENTES}}$
↓
3º $\boxed{\text{SUMAS Y RESTAS}}$

NOTA: Aunque en este tema no hemos estudiado todavía las potencias y las raí-- ces, que pertenecen al tema 6, las incluyo en la tabla, adelantándome a su explicación para disponer así, de una visión maś global del rango de los diversos operadores.

El alumno debe tener siempre presente el orden indicado en la tabla para saber la secuencia en la que debe resolver cualquier operación algebraica sabiendo que cualquier alteración de ese orden le supone el error.

En la tabla anterior vemos que algunas operaciones aparecen en un mismo nivel, esto quiere decir que son intercambiables en el orden. Así, el cociente y el producto pueden alterar su orden sin ningún problema.

Por ejemplo, en la operación; $12.\frac{6}{2}$

Podemos realizar primero el producto; $12.6 = 72$

Y luego, el cociente; $\frac{72}{2} = \underline{36}$

O bien, primero el cociente; $\frac{6}{2} = 3$

Y luego el producto; $12.3 = \underline{36}$

En ambos casos, el resultado es el mismo.

Ejemplo 5: Hallar el resultado de la expresión.

$2 + 5.3 - 6.3 - 1 + 3$

1º) Realizamos los productos.

$$2 + 15 - 18 - 1 + 3$$

2º) Ahora las sumas y las restas.

$$2 + 15 - 18 - 1 + 3 = \underline{1}$$

Ejemplo 6: Hallar el valor de la expresión.

$12:4 - 2 + 6.3 - 1$

1º) Realizamos los cocientes y productos.

$$3 - 2 + 18 - 1$$

2º) Ahora las sumas y las restas.

$$3 - 2 + 18 - 1 = \underline{18}$$

4. USO DEL PARENTESIS

En Matemáticas, cuando las operaciones son largas o queremos separar unas operaciones de otras, encerramos dentro de un paréntesis la expresión o expresiones que deseamos separar.

Ejemplo 7: Resolver la expresión.

$4 - 3 + 5.(6 - 7.2)$

1º) Hallamos el valor del paréntesis.

$$6 - 7.2$$

$$6 - 42$$

$$-36$$

2º) Sustituimos todo el paréntesis por su valor (-36), y seguimos la operación normalmente.

$$4 - 3 + 5.(-36)$$

$$4 - 3 - 180$$

$$R = \underline{-179}$$

Cuando hay varios niveles de paréntesis, se comienza por el más <u>interno</u> y se va progresando hacia el más externo.

Ejemplo 8: Resolver la expresión.

$$1 - ((((3 - 5.2) - 7) + 4 + 2) - 5) =$$

Ante este tipo de ejercicio, aparentemente confuso, es fundamental seguir un <u>orden</u>. Si nos salimos del camino principal nos extraviaremos sin remedio.

1º) A la vista del ejercicio, el paréntesis más interno es;(3 - 5.2) Resolvámoslo en primer lugar.

$$3 - 5.2$$
$$3 - 10$$
$$-7$$

2º) Sustituimos el paréntesis por su valor y seguimos operando.

$$1 - (((-7 - 7) + 4 + 2) - 5)$$

3º) Ahora le toca el turno a (-7 - 7) = -14. Sustituimos su valor en la expresión anterior.

$$1 - ((-14 + 4 + 2) - 5)$$

4º) El siguiente es; (-14 + 4 + 2) = -8

$$1 - (-8 - 5)$$

5º) Finalmente, resolvemos el último paréntesis y la resta final.

$$(-8 - 5) = -13$$
$$1 - (-13)$$
$$1 + 13$$
$$R = \underline{14}$$

Ejemplo 9: Resolver la expresión.

$5 - (4:2 - 6.(3 - 7.2) + 5.(-1))$

1º)	$5 - (2 - 6.(3 - 14) - 5)$
2º)	$5 - (2 - 6.(3 - 14) - 5)$
3º)	$5 - (2 + 66 - 5)$
4º)	$5 - 63$
5º)	$R = \underline{-58}$

Ejemplo 10: Resolver la expresión.

$(5 - 3.4) - (6 - (7 - 2.9 - 6))$

1º)	$(5 - 12) - (6 - (7 - 18 - 6))$
2º)	$- 7 - (6 - (-17))$
3º)	$-7 - (6 + 17)$
4º)	$-7 - 23$
5º)	$R = \underline{-30}$

EJERCICIOS DEL TEMA 4

Realizar las siguientes operaciones:

1.4.- $-4 + 6 - 3 + 12 - 9 + 11$

2.4.- $-12 + 7 - 14 + 16 - 13 + 9$

3.4.- $15 - 1 + 17 + 23 - 33 + 12 + 9 - 18$

4.4.- $5 + 7 - 15 + 9 + 8 - 12 + 13 - 3 + 1$

5.4.- $- 4 + 17 + 8 - 12 + 1 - 15 + 3 - 14 + 9$

6.4.- $9 + 12 - 17 + 11 - 6 + 12 - 5 + 13 - 2$

7.4.- $17 - 23 - 51 + 29 + 1 - 22 + 13 - 11$

Hallar el resultado de las siguientes operaciones:

8.4.- a) $-8.12 =$ b) $-16:4 =$ c) $7.(-9) =$ d) $48:-12 =$

9.4.- a) $(-27):(-3) =$ b) $(-33):3 =$ c) $(-14).(-7) =$ d) $(-23).(-5) =$

10.4.- a) $(-5).(-7) =$ b) $14:(-7) =$ c) $9.(-10) =$ d) $(-56):(-28) =$

11.4.- a) $(-12).9 =$ b) $121:(-11) =$ c) $(-42).3 =$ d) $(-26):2 =$

Calcular el valor de:

12.4.- $(-1).3.(-6).5.(-2).(-6).7 =$

13.4.- $4.(-6).(-5).2.(-1).(-3).6.(-4) =$

14.4.- $5.(-1).(-2).7.(-3).4.(-9) =$

15.4.- $6.(-2).(-3).4.3.(-5).1.(-2).(-7) =$

Resolver los siguientes ejercicios:

16.4.- $-6 + 2.(5 + 7.2) - 9 =$

17.4.- $(2 - 3 - 4).(5 + 6.(3 - 5)) =$

18.4.- $(4 - 2.(-6) + 5) - (1 - 2.(-4)) =$

19.4.- $9 + 3 - 6.(2 + 5 -1.(6 - 2) + 2) =$

20.4.- $(12 + 5).3 - (4 - (6 + 9 - 7)) =$

21.4.- $(9 + 5.(6 - 2 - 3) - 5.(6 + 2)) =$

22.4.- $(5 + 9.(3 - 6 - 7)) - (4 - (9 + 3.(6 + 4))) =$

23.4.- $1 - (2 - 3.(4 - 5.(6 - 7.(8 - 9)))) =$

24.4.- $4 - 5.(6 - 9 + 5.(3 + 5) + 5.(1 - 2) - 2) =$

25.4.- $(7 - 12:2 + 3.(4 + 27:3 - 1)) =$

26.4.- $3 - 5.(3 + 21:7 - 1.(3 - 9.2)) =$

27.4.- $(4 + 6.(3 - 5.2) + 4.(3 - 2.8)) =$

28.4.- $12 - 4.(2 - 2:2 - 2) - (2 - 8.(6 - 3)) =$

29.4.- $(5 + 3 - 20:4 - (12 - 6.4) + 6 - 7) -10 =$

30.4.- $(4 + 5 - 5.(6 - 6.2)) - (12 + 9.(8 - 2)) =$

31.4.- $(2 + 4.(5 + 14:7 - 1)).3 =$

32.4.- $-12 - 2.(4 - 6 - 1.(3 - 9.(1 - 6))) =$

33.4.- $(6 + 2 - 1.(3 - 5) + 11).(6 - 5.(5 - 6)) =$