TEMA 6

POTENCIAS Y RAICES

1. INTRODUCCION

En Matemáticas necesitamos ampliar el conjunto de los números racionales, estudiados en el tema anterior, para encontrar la solución a operaciones del tipo $\sqrt[n]{a}$.

El número racional es un subconjunto del número real. Los números reales que no pertenecen a los racionales (irracionales) están formados por infinitos decimales, no periódicos. La radicación genera, salvo algunos casos, números irracionales, de los cuales no podemos conocer nunca su valor exacto por más decimales que saquemos. Por esta razón se utilizará en este tema la expresión $\sqrt{2}$, en vez de su valor numérico 1,414213638...

Con esta nomenclatura se pretende simplificar la escritura, a la vez que ser más exactos en las operaciones. Si extraemos la raíz cuadrada de 3 con seis decimales obtenemos 1,732050.... Al elevar al cuadrado este valor obtenemos 2,9999972, evidentemente distinto del valor exacto 3. En cambio, al utilizar la expresión $\sqrt{3}$, y elevarla al cuadrado; $(\sqrt{3})^2 = \underline{3}$, obtenemos el valor verdadero sin ningún error decimal.

2. POTENCIAS. DEFINICION Y PROPIEDADES

Si tenemos un producto donde todos los factores son iguales, podemos escribirlo como.

$$a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots \text{ (n veces)}$$

Esta misma operación puede escribirse de una forma abreviada.

$$a^n \quad \begin{matrix} \nearrow \text{exponente} \\ \searrow \text{base} \end{matrix}$$

Siendo a, el factor que se repite, al que llamamos base y n el número de veces que se repite el producto y que llamamos exponente. Esta forma de escribir abreviadamente un producto de factores iguales, recibe el nombre de potencia.

Cuando el exponente vale 1, la potencia es de primer grado.
" " " " 2 " " " " segundo "
" " " " 3 " " " " tercer "
. . . . . etc . . . .

El signo de una potencia se determina de acuerdo con la siguiente regla.

Si la base es POSITIVA la potencia es siempre POSITIVA
" " " " NEGATIVA y el exponente PAR, la potencia es POSITIVA.
" " " " NEGATIVA " " " IMPAR " " NEGATIVA.

Esto se deduce a partir de las normas del producto de números enteros (ver apartado 2.4 de este libro).

Ejemplos: $4^3 = 4.4.4 = 64$
$(-2)^6 = (-2).(-2).(-2).(-2).(-2).(-2) = 64$
$(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$

A continuación vamos a dar una tabla con los cuadrados y cubos de los diez primeros números naturales.

Números (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados (n^2)	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubos (n^3)	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

La potencia tiene la propiedad distributiva respecto al producto y al cociente. Es decir, se cumple que.

$$(a.b.c)^n = a^n.b^n.c^n \qquad (1)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (2)$$

A partir de (2), se deduce que si una fracción es irreducible, su potencia también lo será.

Las igualdades (1) y (2) también pueden leerse en sentido contrario

$$a^n . b^n . c^n = (a.b.c)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

De esta forma resultan más útiles, a la hora de simplificar operaciones.

La potencia NO tiene la propiedad distributiva respecto de la SUMA y de la RESTA. Es decir, no podemos escribir ecuaciones del tipo.

$$(a + b)^n = a^n + b^n \qquad \text{ERROR}$$
$$(a - b)^n = a^n - b^n \qquad \text{ERROR}$$

Ejemplos: $(2.3.5)^2 = 2^2.3^2.5^2 = 4.9.25 = \underline{900}$ $\qquad (6 - 4)^3 = 6^3 - 4^3$ FALSO

$7^3.13^3 = (7.13)^3 = 91^3 = \underline{753571}$ $\qquad (7 + 2)^5 = 7^5 + 2^5$ FALSO

$\left(\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{8^2}{7^2} = \frac{64}{49}$

$\frac{10^5}{5^5} = \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 2^5 = \underline{32}$

3. OPERACIONES CON POTENCIAS

a) Producto de potencias de la misma base.

Sean las potencias; a^m, a^n, a^p, ..., todas ellas de la misma base (a) y con distintos exponentes (m,n,p,..).

Multipliquemos estas potencias entre sí.

$$a^m.a^n.a^p... \qquad (5)$$

Desarrollemos cada una de las potencias.

$$a.a.a...(\underline{m}\text{ veces}).a.a.a...(\underline{n}\text{ veces}).a.a.a...(\underline{p}\text{ veces})..$$

Agrupando todos los factores.

$$a.a.a.a.a.a...(\underline{m} + \underline{n} + \underline{p} + ...\text{veces})$$

Expresando el producto en forma de potencia.

$$a^{m + n + p + ...} \qquad (6)$$

Comparando la expresión (5) con la (6), obtenemos finalmente.

$$\boxed{a^m.a^n.a^p... = a^{m + n + p + ...}} \qquad (7)$$

"El producto de varias potencias de la misma base es igual a otra potencia de igual base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias".

Ejemplos: $2^4 . 2^5 = 2^{4+5} = 2^9 = \underline{512}$ $\qquad$ $3^2 . 3^5 . 3^9 = 3^{2+5+9} = \underline{3^{16}}$

$(-4)^6 . (-4)^2 = (-4)^{6+2} = (-4)^8 = \underline{65536}$

b) <u>Cociente de potencias de la misma base</u>.

Sean las potencias; a^m y b^n. Vamos a hallar su cociente.

$$\frac{a^m}{a^n} \qquad (8)$$

Desarrollemos ambas potencias.

$$\frac{a.a.a.a \ldots (\underline{m} \text{ veces})}{a.a.a.a \ldots (\underline{n} \text{ veces})}$$

Simplificando los factores del numerador y del denominador, queda.

$$a.a.a \ldots (m - n \text{ veces})$$

Y pasando a forma de potencia.

$$a^{m-n} \qquad (9)$$

Comparando la expresión (8) y la (9), escribimos.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \qquad (10)$$

"El cociente de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia con la misma base y cuyo exponente es igual a la diferencia del exponente del numerador y del denominador".

Ejemplos: $\frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2} = 2^3 = \underline{8}$ $\qquad$ $\frac{(-3)^7}{(-3)^4} = (-3)^{7-4} = (-3)^3 = -27$

$\frac{7^5}{7^4} = 7^{5-4} = 7^1 = \underline{7}$

En la expresión (10), puede ocurrir que el exponente del numerador - ($\underline{m}$), sea igual al exponente del denominador ($\underline{n}$).

En ese caso, la expresión (8) es igual a la unidad.

Si $m = n, \Longrightarrow \frac{a^n}{a^n} = 1$

Y por otro lado, utilizando la expresión (9).

Si $m = n \Longrightarrow a^{n-n} = a^0$

Como, según (10), ambas expresiones son iguales, queda finalmente.

$$\boxed{a^0 = 1} \qquad (11)$$

"Toda potencia de exponente cero, es igual a la unidad".

Ejemplos: $10^0 = 1$ $\qquad (\frac{1}{3})^0 = 1$

$999999^0 = 1$ $\qquad 0{,}000175^0 = 1$

$(-1)^0 = 1$

Al desarrollar el cociente de potencias de igual base, hemos supuesto implícitamente que el numerador es superior al denominador. Sin embargo puede ocurrir que n sea mayor que m, en cuyo caso la igualdad (10) sigue siendo válida, apareciendo exponentes negativos en el resultado.

Ejemplos: $\frac{6^5}{6^7} = 6^{5-7} = 6^{-2}$ $\qquad \frac{3}{3^5} = 3^{1-5} = 3^{-4}$

Un caso particualar se da cuando m = 0, es decir, el numerador es la unidad. Utilizando la expresión (10) escribimos.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Si $m = 0$ $\qquad \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n}$

Y, de acuerdo con (11), queda finalmente.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad (12)$$

"Toda potencia de exponente negativo es igual al recíproco de la misma potencia con exponente positivo".

De igual forma podría escribirse.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Ejemplos: $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ $\qquad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$5^{-5} = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125}$ $\qquad 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0{,}000001$

c) Potencia de otra potencia.

Sea la potencia; a^m, la cual deseamos elevar a otra potencia de exponente n.

$$(a^m)^n \qquad (13)$$

Desarrollemos en forma de producto.

$$a^m.a^m.a^m... \text{ (} n \text{ veces)}$$

Como se trata de un producto de potencias de igual base, sumamos los exponentes.

$$a^{m+m+m+m+...} \text{ (n veces)}$$

En total tenemos.

$$a^{m.n} \qquad (14)$$

Igualando las expresiones (12) y (13), obtenemos finalmente.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}} \qquad (15)$$

"Para elevar una potencia a otra potencia, se deja la misma base y - multiplicamos los exponentes".

Ejemplos: $(5^2)^3 = 5^{2.3} = 5^6$ $\qquad (4^{-2})^{-5} = 4^{(-2).(-5)} = 4^{10}$

$(7^2)^2 = 7^{2.2} = 7^4$ $\qquad (6^4)^{-1} = 6^{4.(-1)} = 6^{-4}$

CUADRO RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

	Ejemplo
$(a.b)^n = a^n.b^n$	$(9.11)^3 = 9^3.11^3$
$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(\frac{2}{7})^2 = \frac{2^2}{7^2}$
$a^m.a^n = a^{m+n}$	$12^5.12^3 = 12^8$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{6^4}{6} = 6^3$
$a^0 = 1$	$8^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$6^{-2} = \frac{1}{36}$
$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(3^4)^5 = 3^{20}$

Cuando nos piden que operemos con potencias de números compuestos, es conveniente descomponerlos en sus factores primos, a fin de poder simplificar los resultados.

Ejemplo 1: Realizar las operaciones indicadas y simplificar: $\dfrac{1176^2.45^3}{10^3.6^2.63^4}$

En primer lugar descomponemos las cinco cantidades en sus factores primos y sustituyo en la fracción.

$1176 = 2^3.3.7^2$

$45 = 3^2.5$

$10 = 2.5$

$6 = 2.3$

$63 = 3^2.7$

$\dfrac{(2^3.7^2.3)^2.(5.3^2)^3}{(2.5)^3.(2.3)^2.(3^2.7)^4}$ Realizo las potencias y agrupo las potencias de la misma base ordenadamente.

$$\frac{2^6.7^4.3^2.5^3.3^6}{2^3.5^3.2^2.3^2.3^8.7^4} = \frac{2^6.3^8.5^3.7^4}{2^5.3^{10}.5^3.7^4} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

Ejemplo 2: Realizar las operaciones indicadas y simplificar: $\dfrac{50^2.30^4}{75^3.30.32}$

$50 = 2.5^2$

$30 = 2.3.5$

$75 = 3.5^2$

$32 = 2^5$

$$\frac{(2.5^2)^2.(2.3.5)^4}{2^5.(3.5^2)^3.(2.3.5)} = \frac{2^2.5^4.2^4.3^4.5^4}{2^5.3^3.5^6.2.3.5} = \frac{2^6.3^4.5^8}{2^6.3^4.5^7} = \underline{5}$$

4. POTENCIAS DE 10

Cuando deseamos representar cantidades muy grandes o muy pequeñas, recurrimos al uso de potencias en base diez con exponente positivo o negativo respectivamente. A esta forma de representar cantidades se le llama <u>notación exponencial</u> y con ella se pretende reducir el número de cifras necesarias para representar una cantidad, favoreciendo de esta manera su lectura y su utilización en los cálculos matemáticos.

Para pasar un número en notación decimal a notación exponencial.

Sea por ejemplo el 0,00000125 (menor que la unidad).

Se toma la primera cifra significativa (distinta de cero), después - de la coma decimal y se ve el orden que ocupa (sexto).

Escribimos el número, a partir de dicha cifra, olvidándonos de los - ceros y lo multiplicamos por una potencia de diez, con exponente igual a tan-- tas unidades negativas como el orden de la primera cifra significativa.

$$0{,}00000125 = 1{,}25.10^{-6}$$

Si el número es mayor que la unidad se procede igual, pero colocando el exponente positivo.

$$17500000000 = 175.10^{8}$$

Para pasar un número en notación exponencial a notación decimal.

Si el número es menor que la unidad, se toman tantas cifras decima-- les hasta la primera cifra significativa,como el valor del exponente.

$$2{,}38.10^{-5} = 0{,}0000238$$

Si es mayor que la unidad se desplaza la coma tantas posiciones como indique el exponente de la potencia, completándose con ceros si es necesario.

$$6{,}67.10^{10} = 66700000000$$

TABLA DE POTENCIAS DE 10

10^{6}	1.000.000	10^{-6}	0,000001
10^{5}	100.000	10^{-5}	0,00001
10^{4}	10.000	10^{-4}	0,0001
10^{3}	1.000	10^{-3}	0,001
10^{2}	100	10^{-2}	0,01
10^{1}	10	10^{-1}	0,1
10^{0}	1		

Ejemplos: Pasar a notación exponencial.

a) $0{,}000000000897 = 8{,}97.10^{-10}$

b) $0{,}000010025 = 1{,}0025.10^{-5}$

c) $93400000000 = 934.10^{8}$

d) $10060000000000 = 1006.10^{10}$

Pasar a notación decimal.

a) $6{,}67.10^{-11} = 0{,}0000000000667$

b) $1{,}6.10^{-19} = 0{,}00000000000000000016$

c) $1{,}9.10^{9} = 1900000000$

d) $20{,}08.10^{6} = 20080000$

5. RADICACION

Hallar la raíz de orden n de un número real a, es encontrar otro número real r, tal que la potencia de orden n de r nos de a.

índice

$$r = \sqrt[n]{a} \qquad\qquad r^n = a$$

radicando

raíz

La radicación es la función inversa de la potenciación, ambas están relacionadas según.

Potencia		Raíz
base	......	radicando
exponente	......	índice

Al aplicar una potencia a una raíz, de forma que coincidan el exponente con el índice, desaparece la raíz, obteniéndose el valor del radicando.

$$(\sqrt[5]{7})^5 = 7$$

Al aplicar una raíz a una potencia, de forma que coincida el índice de la raíz con el exponente de la potencia, desaparece la potencia, obteniéndose el valor de la base.

$$\sqrt[9]{4^9} = 4$$

Cuando el índice de la raíz es la unidad, obtenemos el valor del radicando.

$$\sqrt[1]{6} = 6$$

Cuando el índice de la raíz es 2, no se pone ningún índice.

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$$

La definición de raíz conlleva una atención especial a la cuestión de los signos.

Si el radicando es POSITIVO y el índice PAR hay DOS soluciones; (+) y (-).
" " " " " " " " IMPAR " UNA " (+).
" " " " NEGATIVO " " " PAR; NO TIENE SOLUCION.
" " " " " " " " IMPAR hay UNA solución (-).

El por qué de esta tabla está basado en las propiedades de los signos de las potencias (ver apartado 2 de este tema).

Ejemplos: $\sqrt{-36}$ = No existe $\qquad \sqrt[3]{-27} = -3$

$\sqrt{81} = \begin{matrix}+9\\-9\end{matrix} \qquad \sqrt[3]{8} = 2$

A pesar de que las raíces de índice par de los números positivos tienen doble signo, en todo este tema se va a tomar siempre la solución positiva.

6. PROPIEDADES DE LA RADICACION

a) Propiedad distributiva de la raíz respecto del producto y del cociente.

"La raíz de orden n de un producto es igual al producto de las raíces del mismo orden de los factores".

$$\boxed{\sqrt[n]{a.b.c} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}} \qquad (16)$$

De igual forma.

"La raíz de orden n de un cociente es igual al cociente de las raíces del mismo orden del numerador y del denominador".

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}} \qquad (17)$$

Estas dos igualdades también pueden ser leídas de derecha a izquierda, con lo cual podemos situar bajo un mismo radicando varios factores o los dos términos de un cociente, siempre y cuando todas las raíces implicadas tengan el mismo índice.

La radicación NO TIENE la propiedad distributiva respecto de la SUMA o la RESTA, al igual que ocurría con la potenciación.

Ejemplos: $\sqrt[3]{729.512.125} = \sqrt[3]{729}\,.\sqrt[3]{512}\,.\sqrt[3]{125} = 9.8.5 = \underline{360}$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{3}\,.\sqrt[3]{4}\,.\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2.3.4.5} = \sqrt[3]{120}$$

$$\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = \underline{4}$$

$$\sqrt{16 + 25} = \sqrt{16} + \sqrt{25} = 4 + 5 = 9 \qquad \text{FALSA}$$

$$\sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \qquad \text{CIERTA}$$

b) "Si se multiplica o divide el índice de una raíz y el exponente del radicando por un mismo número, la raíz no varía".

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.k]{a^{m.k}} \qquad (18)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/k]{a^{m/k}} \qquad (19)$$

Para demostrarlo tomemos los dos miembros de la igualdad (18) y elevémoslos a la potencia de orden n.k

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n.k} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^k = (a^m)^k = \underline{a^{m.k}}$$
$$\left(\sqrt[n.k]{a^{m.k}}\right)^{n.k} = \underline{a^{m.k}}$$

Se llega al mismo valor, luego la ecuación de partida, la (18), es cierta.

De igual forma se demostraría la ecuación (19), elevando los dos miembros a la potencia $\frac{n}{k}$.

Como aplicación de esta propiedad, tomemos una raíz cualquiera $\sqrt[n]{a^m}$ y dividamos el índice y el exponente por n.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/n]{a^{m/n}} = a^{m/n}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}} \qquad (20)$$

"Toda raíz puede transformarse en una potencia de exponente fraccionario sin más que dividir el exponente del radicando por el índice de la raíz"

Esta aplicación es muy importante porque nos permite pasar un radical a potencia y viceversa.

Ejemplos: $\sqrt[4]{3^5} = 3^{5/4}$ $\qquad \sqrt[6]{2^7} = 2^{7/6}$

$\sqrt{5} = 5^{1/2}$ $\qquad 7^{1/5} = \sqrt[5]{7}$

$2^{-3/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}$

7. REDUCCION DE RADICALES A INDICE COMUN

Para trabajar con radicales y poder compararlos entre sí, es necesario que todos posean el mismo índice. Por ello, es importante hallar los radicales del mismo índice, equivalentes a otros dados, con índices distintos.

NOTA: Cuando hablamos de radicales equivalentes nos referimos a que tienen el mismo valor numérico.

Imaginemos que nos dan las raíces; $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{11}$ y nos piden encontrar otras equivalentes pero con el mismo índice.

En primer lugar, tendremos que determinar cuál es ese índice común, esto es, un número que sea a la vez múltiplo de todos los índices (2, 3, 4 y 6)

De todos los infinitos múltiplos posibles, el más sencillo es el menor de todos ellos. En otras palabras, deberemos hallar el mínimo común múltiplo de todos los índices.

Con los datos de nuestro ejemplo hacemos.

$2 = 2$

$3 = 3$

$4 = 2^2$

$6 = 2.3$ $\qquad\qquad$ $\text{m.c.m.}(2,3,4,6) = 2^2.3 = 12$

Ya tenemos los índices de los radicales equivalentes. Ahora falta -- por determinar los radicandos.

$$\sqrt{3} \longrightarrow \sqrt[12]{\ }$$
$$\sqrt[3]{7} \longrightarrow \sqrt[12]{\ }$$
$$\sqrt[4]{5} \longrightarrow \sqrt[12]{\ }$$
$$\sqrt[6]{11} \longrightarrow \sqrt[12]{\ }$$

Si nos fijamos en la 1ª raíz, para obtener el índice 12, hemos tenido que multiplicar el índice original, 2, por 6. Si multiplicamos el índice por 6, también tendremos que multiplicar el exponente del radicando, por 6, para obtener un radical equivalente, de acuerdo con el apartado b de la pregunta 6 de este tema.

$$\sqrt[2]{3^1} \xrightarrow{\times 6} \sqrt[12]{3^6}$$

De igual forma, multiplicamos el índice y el exponente del radicando de la 2ª fracción por $\frac{12}{3} = 4$, la 3ª por $\frac{12}{4} = 3$ y la 4ª por $\frac{12}{6} = 2$. Con - lo cual obtenemos los radicales equivalentes a los originales pero con igual - índice.

$$\sqrt{3} = \sqrt[12]{3^6}$$
$$\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4}$$
$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$$
$$\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{11^2}$$

Para obtener los radicales equivalentes, de una forma sistemática, - seguiremos los siguientes pasos.

1º) Hallamos el m.c.m. de todos los índices y lo colocamos como índice común en todos los radicales.

2º) Se divide el m.c.m. hallado,por cada índice y el resultado se -- multiplica por el exponente original de cada radicando, obteniendose el nuevo exponente.

Ejemplo 3: Reducir a índice común los radicales; $\sqrt[2]{7}$, $\sqrt[8]{3^2}$, $\sqrt[3]{5^2}$

1º) Hallo el m.c.m. de los índices

$2 = 2$
$8 = 2^3$
$3 = 3$ $\qquad$ m.c.m.$(2,3,8) = 2^3.3 = 24$

2º) Coloco el nuevo índice.

$$\sqrt[24]{} \;,\; \sqrt[24]{} \;,\; \sqrt[24]{}$$

3º) Calculo los nuevos exponentes de los radicandos.

a) $\frac{24}{2} = 12$ $\qquad$ $12.1 = 12$ $\qquad$ $\sqrt[24]{7^{12}}$

b) $\frac{24}{8} = 3$ $\qquad$ $3.2 = 6$ $\qquad$ $\sqrt[24]{3^6}$

c) $\frac{24}{3} = 8$ $\qquad$ $8.2 = 16$ $\qquad$ $\sqrt[24]{5^{16}}$

4º) La solución buscada es:

$$\sqrt[24]{7^{12}} \;,\; \sqrt[24]{3^6} \;,\; \sqrt[24]{5^{16}}$$

Cuando el radicando es un número compuesto, interesa realizar la descomposición en factores primos, a fin de poder simplificar los resultados.

Ejemplo 4: Reducir a índice común y operar, simplificando el resultado

$$\frac{\sqrt{162}\,.\sqrt[12]{25}}{\sqrt[6]{29160}}$$

Descompongo los radicandos en factores primos.

$162 = 2.3^4$
$25 = 5^2$
$29160 = 2^3.3^6.5$

El m.c.m. de los índices vale.

$2 = 2$
$6 = 2.3$
$12 = 2^2.3$ $\qquad$ m.c.m.$(2,6,12) = 2^2.3 = 12$

$$\frac{\sqrt{2.3^4}\,.\sqrt[12]{5^2}}{\sqrt[6]{2^3.3^6.5}} = \frac{\sqrt[12]{2^6.3^{24}}\,.\sqrt[12]{5^2}}{\sqrt[12]{2^6.3^{12}.5^2}} = \sqrt[12]{\frac{2^6.3^{24}.5^2}{2^6.3^{12}.5^2}} = \sqrt[12]{\frac{2^6.3^{24}.5^2}{2^6.3^{12}.5^2}} =$$

$$= \sqrt[12]{3^{12}} = \underline{3}$$

8. OPERACIONES CON RADICALES

Definimos, radicales semejantes, como aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando, pudiendo ser distintos los coeficientes.

Por ejemplo, son radicales semejantes; $-5\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

Pasemos ahora a ir viendo las distintas operaciones con radicales.

1) Suma y resta de radicales.

Para sumar o restar varios radicales semejantes, se saca factor común el radical y se suman o restan los coeficientes.

Ejemplo: $-7.\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{18} + 5.\sqrt[3]{18} - 2.\sqrt[3]{18} = (-7+1+5-2).\sqrt[3]{18} =$

$= \underline{-3.\sqrt[3]{18}}$

Si los radicales no fueran semejantes NO los podemos agrupar, hay que hallar cada raíz por separado y a continuación sumar o restar estos valores

Ejemplo: $\sqrt{49} - \sqrt[3]{8} + \sqrt{100} = 7 - 2 + 10 = \underline{15}$

2) Producto y cociente de radicales.

a) Si los radicales TIENEN IGUAL índice se opera tal como se ha explicado en la pregunta 6, apartado a.

Ejemplo: $\sqrt[5]{6}.\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{6.2.8} = \underline{\sqrt[5]{96}}$

$$\frac{\sqrt[7]{4}}{\sqrt[7]{2}} = \sqrt[7]{\frac{4}{2}} = \underline{\sqrt[7]{2}}$$

b) Si los radicales NO TIENEN todos el mismo índice, hay que reducirlos a índice común y luego se opera como en el apartado anterior.

Ejemplo: $\sqrt[4]{3}.\sqrt[6]{2}.\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{3^3}.\sqrt[12]{2^2}.\sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2^2.3^3.7^4}$

$4 = 2^2$

$6 = 2.3$

$3 = 3$ m.c.m.$(4,6,3) = 2^2.3 = 12$

3) Potencia de una raíz.

Sea la raíz $\sqrt[n]{a}$ que deseamos elevar a la potencia m-ésima.

$$(\sqrt[n]{a})^m \qquad (21)$$

Por definición de potencia, podemos escribir.

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a} \dots (\underline{m} \text{ veces})$$

De acuerdo con la regla del producto de raíces.

$$\sqrt[n]{a.a.a...\ (\underline{m}\ veces)}$$

Y escribiendo el radicando en forma de potencia.

$$\sqrt[n]{a^m} \qquad (22)$$

Comparando (21) y (22), queda finalmente.

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}} \qquad (23)$$

"La potencia de una raíz es otra raíz cuyo radicando se ha elevado a dicha potencia".

4) <u>Raíz de otra raíz</u>.

Sea la raíz $\sqrt[n]{a}$, a la cual deseamos extraer su raíz m-ésima.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \qquad (24)$$

Escribimos la raíz en forma de exponente fraccionario, con lo cual - tenemos.

$$(a^{1/n})^{1/m}$$

Aquí tenemos la potencia de otra potencia, que según el apartado $\underline{c}$ - de la pregunta 3 de este tema, se resuelve multiplicando los exponentes.

$$a^{1/m.n}$$

Y pasando a forma de radical.

$$\sqrt[m.n]{a} \qquad (25)$$

Comparando (24) y (25) obtenemos.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}} \qquad (26)$$

"La raíz de una raíz es otra raíz cuyo índice es igual al producto de los índices".

Ejemplos: $(\sqrt[5]{2^3})^6 = \sqrt[5]{2^{18}}$ $\qquad (\sqrt[3]{11})^3 = \sqrt[3]{11^3} = 11$

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7^2}} = \sqrt[15]{7^2}$ $\qquad \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

Para introducir una cantidad que está multiplicando a la raíz, en el radicando, debemos elevar esa cantidad a una potencia del mismo orden que el - índice de la raíz.

Así, en la expresión $2.\sqrt[3]{14}$ deseamos que el coeficiente, 2, entre en la raíz, para lo cual hay que elevarlo a la potencia $\underline{3}$ que es el índice de la raíz.

$$2.\sqrt[3]{14} = \sqrt[3]{2^3.14} = \sqrt[3]{8.14} = \sqrt[3]{112}$$

De igual forma, aplicando la propiedad distributiva de la raíz respecto del producto, podemos sacar del radicando cualquier factor que sea potencia de un orden múltiplo del índice.

Así, en la expresión $\sqrt{8}$, podemos descomponer el radicando en la forma 8 = 4.2. Sustituyendo y aplicando la propiedad distributiva.

$$\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = \sqrt{4}\,.\sqrt{2} = 2.\sqrt{2}$$

Ejemplo 5: Hallar el valor de $\sqrt[5]{46656}$.

Descompongo el radicando en producto de factores primos.

$$46656 = 2^6.3^6$$

Sustituyo este valor en el radicando.

$$\sqrt[5]{2^6.3^6}$$

Agrupando convenientemente los factores.

$$\sqrt[5]{2^5.3^5.2.3}$$

Aplicando la propiedad distributiva.

$$\sqrt[5]{2^5}\,.\sqrt[5]{3^5}\,.\sqrt[5]{2.3}$$

Finalmente queda.

$$2.3.\sqrt[5]{2.3}$$

$\sqrt[5]{46656} = \underline{6.\sqrt[5]{6}}$, expresión mucho más simplificada y cómoda de manejar.

9. RACIONALIZACION

Cuando en una fracción, el denominador contiene algún radical, se procede generalmente a eliminarlo mediante una serie de transformaciones. A este proceso de quitar raíces del denominador recibe el nombre de racionalización

Si hay una única raíz en el denominador.

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Pasamos este radical a potencia de exponente fraccionario.

$$\frac{1}{a^{m/n}} \qquad (27)$$

Para que desaparezca la raíz, el exponente del radicando ha de ser - la unidad, para lo cual debemos multiplicar por un potencia de igual base y de exponente $\underline{x}$, tal que.

$$\frac{m}{n} + x = 1$$

Despejendo la $\underline{x}$.

$$x = 1 - \frac{m}{n} = \frac{n - m}{n}$$

Por tanto hay que multiplicar el numerador y el denominador de la -- fracción (27) por.

$$a^{\left(\frac{n-m}{n}\right)}$$

O, lo que es lo mismo, por.

$$\sqrt[n]{a^{n-m}} \qquad (28)$$

Con lo cual, quedaría.

$$\frac{1}{a^{m/n}} \cdot \frac{a^{n-m/n}}{a^{n-m/n}} = \frac{a^{n-m/n}}{a^{m/n + n-m/n}} = \frac{a^{n-m/n}}{a^{m+n-m/n}} = \frac{a^{n-m/n}}{a^{n/n}} =$$

$$= \frac{a^{n-m/n}}{a} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

En definitiva, para racionalizar una fracción con un único radical - en el denominador, de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, se procede a multiplicar el numerador y - el denominador de la fracción por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejemplo 6: Racionalizar la fracción $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$.

En este caso, n = 5 y m = 1. Aplicando la expresión (28), debemos - multiplicar los dos términos de la fracción por.

$$\sqrt[5]{3^{5-1}} = \underline{\sqrt[5]{3^4}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$$

El caso más frecuente que se suele presentar es cuando n = 2 (raíz cuadrada) y m = 1 (radicando sin exponente). En este caso, aplicando (28) debe remos multiplicar los dos términos de la fracción por $\sqrt{a}$, es decir, el MISMO valor que teníamos en el denominador.

Ejemplo 7: Racionalizar; $\frac{12}{\sqrt{6}}$

$$\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12.\sqrt{6}}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{12.\sqrt{6}}{6} = 2.\sqrt{6}$$

En el denominador puede haber más de una raíz. Nosotros vamos a ver el caso de <u>dos</u> raíces con índice, <u>dos</u>.

En Matemáticas definimos el conjugado de una suma o una diferencia de términos, como esa misma expresión con el signo del segundo término cambiado.

Ejemplos: El conjugado de $-\sqrt{3} + 4 = -\sqrt{3} - 4$

" " " $1 - \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$

" " " $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Ejemplo 8: Racionalizar la expresión; $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

El conjugado de $\sqrt{3} - \sqrt{5} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} - \sqrt{5}).(\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{3 - 5} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{-2} = -\frac{1}{2}.(\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

10. PRACTICA DE LA RAIZ CUADRADA

A lo largo de este tema, no hemos utilizado los valores numéricos asociados a cada radical. Sin embargo, en algunas aplicaciones prácticas, en asignaturas como la Tecnología, la Física, etc. necesitamos conocer el valor de la raíz.

El método general para resolver raíces de cualquier orden es mediante el uso de la función logarítmica, cuyo estudio se sale de los objetivos de este libro.

Cuando la raíz es de índice dos, (raíz cuadrada) existe un método, un tanto laborioso para hallar la raíz.

Ejemplo: Hallar la raíz cuadrada de 530,7

1) Se parte de la coma decimal y separamos el número dado en grupos de dos cifras, hacia la izquierda y hacia la derecha, teniendo en cuenta que -

podemos tomar todos los decimales que deseemos, en forma de grupos de 2 ceros, cuando se terminan las cifras significativas.

5 3 0,7 0 , . . .

2) Partiendo de la izquierda y avanzando hacia la derecha se toma el primer grupo de dos cifras, el 5, calculándose su raíz cuadrada por defecto, - es decir, el número entero cuyo cuadrado se aproxime más al 5, sin llegar a sobrepasarlo. Se anota este número a la derecha.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{5\ 3\ 0{,}7} & 2 \\ \hline
\end{array}
$$

3) Se halla el cuadrado de 2, se resta del 5 y se anota debajo el resultado.

A continuación se bajan las dos cifras siguientes, 30.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{5\ 3\ 0{,}7} & 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-4} & \\
\ \ 1\ 3\ 0 &
\end{array}
$$

4) Se escribe el duplo de la cantidad del casillero superior, en una fila aparte, a la derecha, seguida de un hueco, el signo "por", otro hueco, y el signo igual.

$$4\ \_\ \times\ \_\ =$$

Sustituimos el hueco por UNA CIFRA, de forma que el resultado se a-- proxime lo más posible al 130, sin sobrepasarle.

Una vez elegida la cifra la situamos en la casilla superior derecha, a continuación del 2.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{5\ 3\ 0{,}7} & 2\ 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-4} & 4\ \underline{3} \times \underline{3} = 129 \\ \cline{2-2}
\ \ 1\ 3\ 0 &
\end{array}
$$

La cantidad obtenida se coloca restando, debajo del 130. Se halla la resta y se bajan las dos cifras siguientes, repitiéndose el proceso. Como este grupo de cifras son decimales nos obliga a colocar la coma decimal en el resultado, en esa posición.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{5\ 3\ 0{,}7} & 2\ 3, \\ \cline{2-2}
\underline{-4} & 4\ \underline{3} \times \underline{3} = 129 \\ \cline{2-2}
\ \ 1\ 3\ 0 & \\
\underline{-\ 1\ 2\ 9} & \\
\ \ \ \ 1\ 7\ 0 &
\end{array}
$$

Ahora se hace, 23_ x _ =

Y se va probando la cifra adecuada, tal que obtengamos una cantidad -no superior a 170.

$$23\underline{0} \times \underline{0} = 0$$

$\sqrt{5\ 3\ 0{,}7}$	$2\ 3{,}0$ ← Raíz
Radicando → -4	$4\ \underline{3} \times \underline{3} = 1\ 2\ 9$
$1\ 3\ 0$	$4\ 6\ \underline{0} \times \underline{0} = 0$
$-1\ 2\ 9$	
$1\ 7\ 0$	
-0	
$1\ 7\ 0$ ← Resto	

El proceso sigue indefinidamente, pues ya sabemos que la radicación -- genera números irracionales (infinitas cifras decimales no periódicas), salvo -- los casos particulares en que el radicando es potencia exacta del mismo orden, o bien, múltiplo del índice.

En todos los casos se cumple que.

$$\text{Radicando} = (\text{Raíz})^2 + \text{Resto}$$

$$530{,}7 = 23^2 + 1{,}7$$

CUADRO RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DE LA RADICACION

	Ejemplos
$\sqrt[n]{a.b.c} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} \,.\, \sqrt[n]{c}$	$\sqrt[3]{125.216.343} = 5.6.7 = \underline{210}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$	$\sqrt[5]{3^2} = 3^{2/5}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.k]{a^{m.k}}$	$\sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6.2]{9^{3.2}} = \sqrt[12]{9^6}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n/k]{a^{m/k}}$	$\sqrt[8]{5^4} = \sqrt[8/4]{5^{4/4}} = \sqrt{5}$
$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[7]{3})^2 = \sqrt[7]{3^2}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

EJERCICIOS DEL TEMA 6

Hallar el valor de las siguientes potencias.

1.6: a) $(-5)^3$ b) 8^2 c) $(-4)^3$ d) $(-3)^1$

2.6: a) $(\frac{1}{2})^3$ b) $(-\frac{3}{8})^0$ c) $(-\frac{3}{4})^3$ d) $(\frac{7}{8})^1$

3.6: a) $(-37)^0$ b) $(-2)^5$ c) $(\frac{2}{3})^1$ d) $(-\frac{2}{5})^2$

Hallar el valor de las siguientes operaciones:

4.6: a) $3^3.3^4$ b) $(-2)^5.(-2)^2$ c) $(\frac{2}{3}).(\frac{2}{3})^4$ d) $(-1)^4.(-1)^5.(-1)^2$

5.6: a) $(-\frac{1}{4})^3.(-\frac{1}{4}).(-\frac{1}{4})^2$ b) $(\frac{2}{5})^6:(\frac{2}{5})$ c) $3^2.3.3^5$ d) $(\frac{3}{8})^2:(\frac{3}{8}).(\frac{3}{8}).(\frac{3}{8})^2$

6.6: a) $(-\frac{7}{8})^{38}:(-\frac{7}{8})^{35}$ b) $\left[(-3)^3\right]^3$ c) $\left[(\frac{1}{2})^2\right]^3$ d) $\left[(-\frac{3}{4})^3\right]^4$

Descomponer en factores primos y hallar el valor de las siguientes raíces

7.6: a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[5]{-32}$ d) $\sqrt[3]{343}$

8.6: a) $\sqrt[3]{1000}$ b) $\sqrt[3]{-0,064}$ c) $\sqrt[5]{-243}$ d) $\sqrt[5]{-0,00001}$

9.6: a) $\sqrt{\frac{-4}{81}}$ b) $\sqrt{\frac{25}{49}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{1}{1000}}$

10.6: a) $\sqrt[3]{(-8).(-27).(64)}$ b) $\sqrt[5]{243.(-32).0,00001}$

11.6 a) $\sqrt{25:0,0001}$ b) $\sqrt{(-81)^3:3^2}$

12.6: a) $\sqrt{38}$ b) $\sqrt[3]{(-5)^6}$ c) $\sqrt[7]{(-\frac{1}{2})^{21}}$ d) $\sqrt[3]{(-2)^{15}}$

13.6: a) $\sqrt[4]{9}$ b) $\sqrt[12]{8}$ c) $\sqrt[5]{7^{10}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{16}}$

Calcular el valor de las siguientes raíces compuestas.

14.6: a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt{\sqrt{2401}}$

15.6: a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

16.6: a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{531441}}}$ b) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

17.6: a) $\sqrt{25\sqrt{81\sqrt{256}}}$ b) $\sqrt[12]{4096}$

Realizar las siguientes sumas y restas de radicales.

18.6: a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ c) $2.\sqrt{75}-\sqrt{48}$

b) $5.\sqrt{125}+6.\sqrt{45}$ d) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{135}$

19.6: a) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[3]{54}+2.\sqrt[3]{16}-5.\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{27}$ d) $3.\sqrt{20}+12.\sqrt{45}+2.\sqrt{125}$

20.6: a) $7.\sqrt{108}+4.\sqrt{3}-10.\sqrt{27}$ b) $\sqrt{32}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$

Simplificar los siguientes radicales.

21.6: a) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{98}$

b) $\sqrt{12}$ d) $\sqrt{200}$

22.6: a) $\sqrt[3]{250}$ c) $\sqrt[3]{625}$

b) $\sqrt[3]{108}$ d) $\sqrt[3]{432}$

23.6: a) $\sqrt{\frac{4}{45}}$ c) $\sqrt{288}$

b) $\sqrt{147}$ d) $\sqrt{72}$

Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones.

24.6: a) $16^{1/2}$ c) $(-27)^{1/3}$

b) $9^{3/2}$ d) $0,04^{1/2}$

25.6: a) $25^{3/2}+1^{1/2}-(-27)^{2/3}$ b) $27^{-1/3}-3.27^{0}-1^{3/2}+8^{2/3}$

26.6: Simplificar la expresión:

$$\frac{\sqrt{3}.3^{1/3}}{3^{-1}.\sqrt[3]{9}}$$

27.6: ¿Son iguales las expresiones; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}}$ y $a^{p/m.n}$?. ¿Por qué?.

28.6: Hallar el valor de $\sqrt{4\sqrt{9.\sqrt[3]{729}}}$, explicando todos los pasos que des.

29.6: Idem con $\sqrt{2.\sqrt{4.\sqrt{64}}}$

Racionalizar las expresiones siguientes.

30.6: a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

31.6: a) $\dfrac{4.\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

32.6: a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$

33.6: a) $\dfrac{6}{3.\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2.\sqrt{6}}$

34.6: a) $\dfrac{4.\sqrt{12}}{2.\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{5.\sqrt{27}}{4.\sqrt{3}}$

Resolver las siguientes operaciones.

35.6: $\dfrac{\sqrt[7]{2187} \cdot \sqrt[10]{1024}}{\sqrt[5]{7776}}$

36.6: $\dfrac{\sqrt[3]{2744}}{\sqrt{49} \cdot \sqrt[6]{64}}$

37.6: $\dfrac{90^2 . 154}{18^2 . 385}$

38.6: $\dfrac{35^3 . 6^2 . 27}{21^3 . 30^2}$

39.6: $\dfrac{\sqrt{28} \cdot \sqrt[3]{1500}}{\sqrt[6]{144.343}}$

40.6: $\dfrac{\sqrt[4]{144} \cdot \sqrt{10125}}{\sqrt[4]{500 \cdot 4500}}$