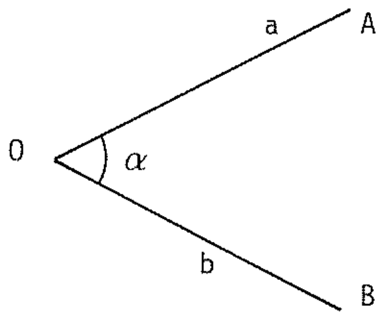
TEMA 8

ANGULOS Y POLIGONOS

1. ELEMENTOS DE LOS ANGULOS



Se define el concepto de ángulo como la porción del plano limitada por dos semirrectas que tienen un punto común, su origen.

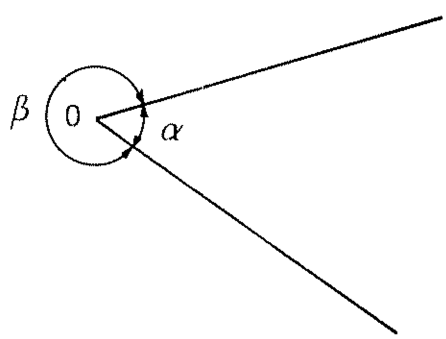
A dicho punto se le llama VERTICE y las dos semirrectas, a y b, reciben el nombre de LADOS.

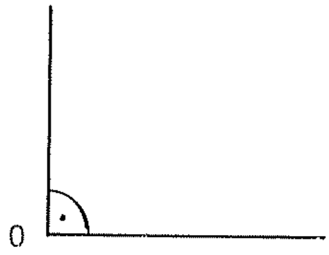
Para nombrar un ángulo se puede utilizar una letra minúscula o mayúscula, a veces del alfabeto griego. También se puede nombrar utilizando tres letras mayúsculas, de forma que la central represente el vértice y las otras dos las situamos en los extremos de cada uno de los lados. Encima de ellas se coloca una "V" invertida para advertir que se trata de un ángulo.

El ángulo de la figura podemos nombrarlo como.

$$\widehat{0}$$
$$\widehat{\alpha}$$
$$\widehat{AOB}$$

Obsérvese que al trazar dos semirrectas desde un punto común, dividimos el plano en dos regiones, cada una de ellas situada a una parte de las semirrectas, de forma que éstas constituyan la frontera de separación entre los dos ángulos.

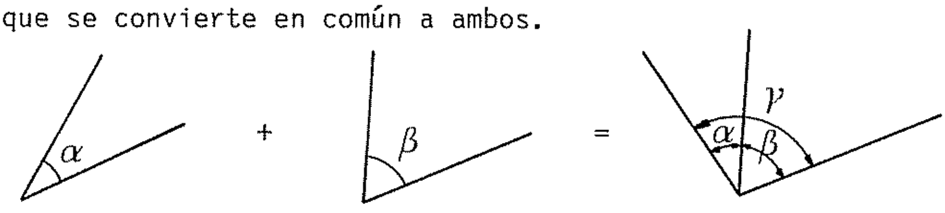




Un ángulo se llama RECTO cuando -- sus lados son perpendiculares. Para diferenciarlo de aquellos que no lo son - utilizo la notación ∟

Angulo LLANO es el formado por dos lados con la misma dirección.

Para sumar gráficamente dos ángulos, hacemos coincidir el vértice y uno de los lados que se convierte en común a ambos.



$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$$

Dos ángulos se dice que son COMPLEMENTARIOS cuando su suma da un ángulo recto.

Dos ángulos se dice que son SUPLEMENTARIOS cuando su suma da un ángulo llano.

2. MEDIDA DE ANGULOS

Se utilizan tres tipos de unidades para medir la abertura de un ángulo.

- sistema sexagesimal.
- " centesimal.
- radianes.

El sistema sexagesimal es el más antiguo, su origen se remonta a los sumerios, y a pesar de la dificultad que presenta para realizar operaciones algebraicas, sigue siendo el más utilizado desde hace maś de 5.000 años.

El sistema sexagesimal divide la circunferencia o ángulo total en 360 partes iguales, cada una de ellas representa un grado sexagesimal (1º).

Al dividir el grado sexagesimal en 60 partes iguales obtenemos el minuto sexagesimal (1').

Si dividimos el minuto sexagesimal en 60 partes iguales obtenemos el segundo sexagesimal (1").

Por tanto; Circunferencia = 360°

$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 1''$$

El sistema centesimal aparece una vez implantado el sistema de numeración en base 10, como una necesidad lógica para poder llevar a cabo con rapidez las operaciones algebraicas con ángulos.

Comenzamos dividiendo la circunferencia en 400 partes iguales, cada una de ellas representa un grado centesimal (1^g).

Al dividir el grado centesimal en 100 partes iguales obtenemos el minuto centesimal (1^m).

Si dividimos el minuto centesimal en 100 partes iguales, obtenemos el segundo centesimal (1^s).

Por tanto; Circunferencia = 400^g

$$1^g = 100^m$$

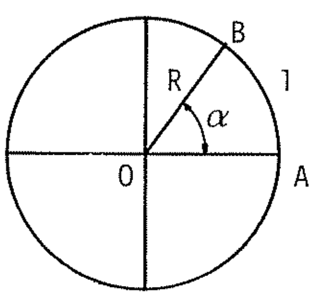
$$1^m = 100^s$$

El sistema centesimal se utiliza preferentemente en las medidas topográficas y sus unidades son más pequeñas que las correspondientes del sistema sexagesimal.

La ventaja de una circunferencia de 360° frente a otra de 400^g estriba en que los ángulos más usados se representan por números enteros y en el sistema centesimal necesitaríamos usar números decimales. Obsérvese que el 360 tiene cinco divisores más que el 400 y el 90 tres divisores más que el 100.

Los radianes se utilizan como unidad cuando tenemos que utilizar fórmulas de Física. En todas las expresiones en las que aparezca un ángulo, éste debe ser expresado obligatoriamente en radianes.

La unidad es el radián. Equivale al ángulo que abarca sobre una circunferencia un arco de longitud igual al radio de dicha circunferencia.



Si llamamos:

R ... radio de la circunferencia.

l ... longitud del arco AB, abarcado por el ángulo α sobre la circunferencia de radio R.

Entonces, α= 1 radián si l = R

Si 1 radián abarca sobre la circunferencia de radio R, un arco de R metros de longitud, entonces un ángulo α cualquiera, expresado en radianes, abarcará un arco de x metros.

Planteemos la proporcionalidad.

1 radián .... R metros
α radianes .... x "

$$x = \alpha . R$$

La expresión anterior es muy importante porque relaciona el arco, el ángulo que abarca y el radio de la circunferencia.

$$\boxed{\text{arco} = \text{ángulo (radianes).radio}} \qquad (1)$$

Ejemplo 1: Hallar la longitud del arco que abarca un ángulo de $\frac{\pi}{5}$ radianes en una circunferencia de 15 metros de radio.

Sustituyendo en (1) los datos del problema.

$$\text{arco} = \frac{\pi}{5} . 15 = 5\pi = \underline{15,708 \text{ m}}$$

Veamos ahora la equivalencia entre los grados sexagesimales y los radianes.

Una circunferencia de radio R, tiene una longitud de.

$$C = 2. \pi . R$$

Planteamos la siguiente regla de tres.

Si, un arco de 2. π.R metros abarca un ángulo de 360º
" " " R " abarcará " " xº

Como la proporcionalidad es directa, despejando la x.

$$x = \frac{360^{\circ} . R}{2 \pi R}$$

Simplificando.

$$x = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

Es decir, $$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad (2)$$

Realizando el cociente obtenemos.

$$1 \text{ radián} = 57^{\circ}\ 17'\ 44,8'' \qquad (3)$$

Este valor no es exacto. Como el número π es irracional, la equivalencia entre radianes y grados sexagesimales también lo es. Por esa razón es preferible utilizar el valor (2), en vez de (3).

En los ejercicios en los que aparezcan ángulos expresados en radia-- nes es aconsejable expresarlos como fracciones del número "pi", para evitarnos trabajar con números irracionales.

De (2), obtenemos.

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ radianes}}$$

Esta equivalencia es fundamental para realizar cambios de unidades - entre unidades sexagesimales y radianes.

Ejemplo 2: Pasar a radianes 60º

Planteamos la proporción.

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \pi \text{ radianes} \\ 60^\circ & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \quad '' \end{array}$$

Y despejando la $\underline{x}$.

$$x = \frac{60^\circ . \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

Ejemplo 3: Pasar a grados sexagesimales, $\frac{2\pi}{3}$ radianes

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \pi \text{ radianes} \\ x^\circ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{2\pi}{3} \quad '' \end{array}$$

$$x = \frac{180 . 2\pi}{3 . \pi} = 120^\circ$$

Ejemplo 4: Un arco de 28º 32' abarca sobre una circunferencia un arco de 4 m . Hallar el radio de esa circunferencia.

De la expresión (1), despejamos el radio.

$$\text{radio} = \frac{\text{arco}}{\text{ángulo (radianes)}}$$

Ahora, tenemos que pasar el ángulo a radianes.

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \pi \text{ radianes} \\ 28^\circ\ 32' & \ldots\ldots\ldots\ldots & x \quad '' \end{array}$$

$$x = \frac{28^\circ\ 32' . \pi}{180^\circ} = 0,498 \text{ radianes}$$

Sustituyendo arriba.

$$\text{radio} = \frac{4 \text{ m}}{0,498 \text{ rad}} = \underline{8,032 \text{ m}}$$

TABLA DE EQUIVALENCIAS ENTRE GRADOS SEXAGESIMALES Y RADIANES

0º	30º	45º	60º	75º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

3. OPERACIONES CON ANGULOS

Las operaciones aritméticas con radianes no tienen ninguna dificultad, pues se utiliza una única unidad, el radián, y no hay mas que aplicar las reglas de operaciones con números reales.

La notación sexagesimal, por utilizar tres unidades; el grado, el minuto y el segundo, merece una mayor atención.

En el tema 2 de este libro (página 33), se estudió las operaciones con números complejos. La notación sexagesimal es un caso particular de número complejo y ya se vió que el método general de operar con complejos consiste en transformar todas las unidades a la unidad principal y luego operar con ella como un número real.

Sin embargo, si deseamos trabajar con las tres unidades a la vez deberemos seguir las siguientes reglas.

a) Suma de ángulos

Para sumar dos o más ángulos expresados en grados, minutos y segundos sexagesimales, se sitúan en una misma columna las cantidades pertenecientes a una misma unidad y se suman como números naturales, comenzando por los "segundos".

Si la suma excede el valor 60, se añaden en la columna de los minutos tantas unidades como grupos de 60" excedan, dejando el resto en la columna de los "segundos".

A continuación, se suman las cantidades situadas en la columna de los minutos y si excede del valor 60, se añaden a la columna de los grados tantas unidades, como grupos de 60' excedan, dejando el resto en la columna de los minutos.

Finalmente se suman las cantidades en la columna de los grados.

Ejemplo 5: Sabiendo que $\hat{A} = 32^{\circ}\ 43'\ 46''$, $\hat{B} = 93^{\circ}\ 10'\ 39''$ y $\hat{C} = 41^{\circ}\ 28'\ 33''$. Hallar $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$

Se colocan los tres ángulos de forma que coincidadn en una misma columna las mismas unidades y comenzamos a sumar por la derecha.

$$\begin{array}{rrrr} & 32^{\circ} & 43' & 46'' \\ & 93^{\circ} & 10' & 39'' \\ + & 41^{\circ} & 28' & 33'' \\ \hline & & & 118'' \end{array}$$

Como $118'' = 60'' + 58'' = \underline{1'} + 58''$

Añado 1 unidad a la columna de los minutos y dejo el resto, 58", en su sitio.

Sumo ahora las cantidades de la segunda columna.

$$\begin{array}{rrrr} & & 1' & \\ & 32^{\circ} & 43' & 46'' \\ & 93^{\circ} & 10' & 39'' \\ + & 41^{\circ} & 28' & 33'' \\ \hline & & 82' & 58'' \end{array}$$

Como $82' = 60' + 22'$

Añado 1 unidad a la columna de los grados y dejo el resto, 22', en su sitio.

Finalmente, sumo las cantidades de la 3ª columna.

$$\begin{array}{rrrr} & 1^{\circ} & 1' & \\ & 32^{\circ} & 43' & 46'' \\ & 93^{\circ} & 10' & 39'' \\ + & 41^{\circ} & 28' & 33'' \\ \hline & 167^{\circ} & 22' & 58'' \end{array}$$

b) <u>Resta de ángulos</u>

Podemos distinguir dos casos.

- Cuando las tres cantidades del minuendo son mayores que las correspondientes del sustraendo.

En este caso se efectúa la resta, columna por columna, separadamente.

Ejemplo 6: Si $\hat{A} = 51^{\circ}\ 48'\ 36''$ y $\hat{B} = 12^{\circ}\ 44'\ 26''$ Hallar $\hat{A} - \hat{B}$

$$\begin{array}{r} 51^{\circ}\ 48'\ 36'' \\ -\ 12^{\circ}\ 44'\ 26'' \\ \hline 39^{\circ}\ \ 4'\ 10'' \end{array}$$

– Si alguna de las cantidades del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, le añadimos una unidad tomada de la cantidad situada en la columna de su izquierda.

Ejemplo 7: Si $\widehat{A} = 24^{\circ}\ 15'\ 47''$ y $\widehat{B} = 17^{\circ}\ 49'\ 31''$

Hallar $\widehat{A} - \widehat{B}$.

$$\begin{array}{r} 24^{\circ}\ 15'\ 47'' \\ -\ 17^{\circ}\ 49'\ 31'' \\ \hline 16'' \end{array}$$

Ahora nos encontramos con la imposibilidad de restarle 49' a los -- 15' del minuendo. En ese caso tomamos 1º de los 24º de la izquierda y lo convertimos en minutos ($1^{\circ} \times 60 = 60'$), que los sumamos a -- los 15' anteriores, con lo cual disponemos de, $60 + 15 = 75'$, de -- los que ya podemos restar 49'.

En definitiva queda.

$$\begin{array}{r} 23^{\circ}\ 75'\ 47'' \\ -\ 17^{\circ}\ 49'\ 31'' \\ \hline 6^{\circ}\ 26'\ 16'' \end{array}$$

Ejemplo 8: Hallar el complementario de 42º 26' 12".

El complementario de un ángulo es lo que le falta para medir 90º, - por tanto tendremos que restar de 90º el ángulo dado.

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} \\ -\ 42^{\circ}\ 26'\ 12'' \\ \hline \end{array}$$

Para poder realizar esta resta pasamos 1º de los 90º a minutos y de los 60' obtenidos, pasamos 1' a segundos.

$90^{\circ} - 1^{\circ} = 89^{\circ}$

$60' - 1' = 59'$

$$\begin{array}{r} 89^{\circ}\ 59'\ 60'' \\ -\ 42^{\circ}\ 26'\ 12'' \\ \hline 47^{\circ}\ 33'\ 48'' \end{array}$$

Ejemplo 9: Hallar el suplementario de 105º 44' 21".

El suplementario de un ángulo es lo que le falta para medir 180º, - por tanto habrá que restar de 180º el ángulo dado.

$$\begin{array}{r} 180^{\circ} \\ - \ 105^{\circ}\ 44'\ 21'' \\ \hline \end{array}$$

Para poder realizar la resta, pasamos 1° de los 180° a minutos y de los $60'$ obtenidos, pasamos $1'$ a segundos. Con lo cual queda.

$$\begin{array}{r} 179^{\circ}\ 59'\ 60'' \\ - \ 105^{\circ}\ 44'\ 21'' \\ \hline 74^{\circ}\ 15'\ 39'' \end{array}$$

c) Producto de un natural por un ángulo.

La forma de actuar es la de realizar el producto de las tres cantidades por el natural y a continuación, reducir estos valores obtenidos a la unidad inmediatamente superior, siempre que sea posible.

Ejemplo 9: Multiplicar por 7, el ángulo: $17^{\circ}\ 52'\ 29''$

$$\begin{array}{r} 17^{\circ}\ 52'\ 29'' \\ \times\ 7 \\ \hline 119^{\circ}364'203'' \end{array}$$

Para pasar los $203''$ a minutos, dividimos entre 60. El cociente representa los minutos a añadir a los $364'$ y el resto de la división los segundos que quedan.

$$\begin{array}{r|l} 2\ 0\ 3 & 6\ 0 \\ \cline{2-2} \text{segundos} \rightarrow 2\ 3 & 3 \leftarrow \text{minutos} \end{array}$$

$$\underbrace{119^{\circ}\ (364+3)'}_{367'}\ 23''$$

Repetimos el proceso, ahora con los $367'$.

$$\begin{array}{r|l} 3\ 6\ 7 & 6\ 0 \\ \cline{2-2} \text{minutos} \rightarrow 0\ 7 & 6 \leftarrow \text{grados} \end{array}$$

$$(119+6)^{\circ}\ 7'\ 23''$$

$$\underline{125^{\circ}\ 7'\ 23''}$$

d) Cociente de un ángulo por un natural.

En este caso, comenzamos la división por la unidad superior, los grados, y el resto, si lo hay, se acumula a la unidad inmediatamente inferior, -- los minutos, repitiéndose el proceso hasta llegar a los segundos, donde finalizamos.

Ejemplo 10: Dividir entre 8, el ángulo: $231^{\circ}\ 29'\ 17''$

231º	29'	17"	8
71			28º
7º			

Los 7º los multiplicamos por 60, para pasarlos a minutos, sumándoselos a los 29'. El resultado obtenido lo volvemos a dividir entre 8.

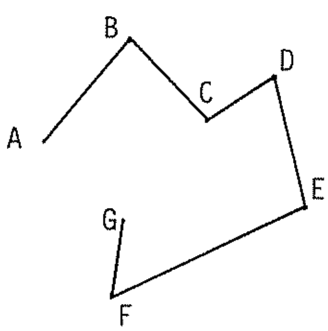
231º	29'	17"	8
71			28º 56'
7ºx60 =	420'		
	449'		
	49		
	1'		

El minuto del resto lo pasamos a segundos, multiplicando por 60, - lo sumamos a los 17" y el resultado lo dividimos entre 8.

231º	29'	17"	8
71			28º 56' 9"
7ºx60 =	420'		
	449'		
	49		
	1'x60 =	60"	
		77"	
		5"	

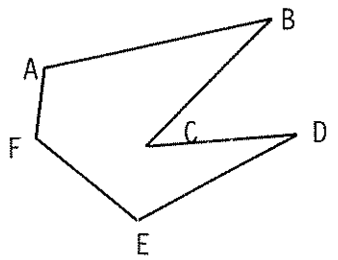
El resultado es un ángulo de: 28º 56' 9", quedando un resto de 5".

4. LINEAS POLIGONALES. POLIGONOS. ELEMENTOS DE LOS POLIGONOS



Si tomamos varios segmentos y los vamos uniendo, haciendo coincidir el - extremo de uno con el origen del si--- guiente, se forma una LINEA POLIGONAL, por ejemplo, la ABCDEFG.

En este caso se trata de una lí-- nea poligonal ABIERTA.



Si el extremo del último segmento coincide con el origen del primero, obtenemos una lñea poligonal CERRADA. Por ejemplo, la ABCDEF.

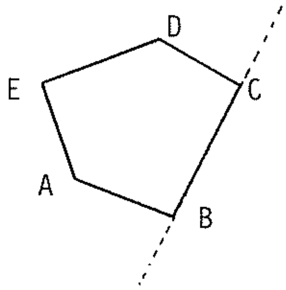
Se define el concepto de POLIGONO, como la superficie plana comprendida entre una lñea poligonal cerrada.

LADOS de un polígono son los segmentos que forman la línea poligonal.

VERTICES de un polígono, son los puntos de unión entre dos lados contiguos. Es fácil ver que.

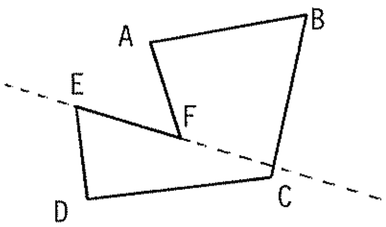
número de vértices = número de lados

Un polígono se dice que es CONVEXO, si al prolongar todos y cada uno de sus lados en ambos sentidos, se cumple siempre que todo el polígono quede a una misma parte de dicha línea.



El polígono ABCDE es convexo, pues al prolongar, por ejemplo, el lado CB, todo el polígono queda a la izquierda - de esa línea.

Lo mismo ocurre con el resto de -- los lados.



Un polígono se dice que es CONCAVO si al prolongar al menos uno de sus lados en ambos sentidos, el polígono queda dividido en dos partes.

El polígono ABCDEF es cóncavo porque al prolongar el lado EF, parte del polígono queda por encima de la línea y otra parte por debajo.

Obsérvese que si hubiéramos prolongado el lado AB, se obtendría la - condición de convexidad, pero la definición es tajante; con 1 lado, al menos, que cumpla la condición de concavidad el polígono ya es cóncavo.

En general, todos los polígono con los que vamos a trabajar en este tema van a ser convexos, sin necesidad de especificarlo.

Un polígono se dice que es REGULAR, cuando todos sus lados y ángu-- los son iguales, e IRREGULAR cuando no se cumple la condición anterior.

Los polígonos reciben distintos nombres según el número de lados que tenga. Estos nombres suelen formarse con los prefijos cardinales griegos y la palabra "gono", que significa "ángulo".

n = 3 ...... triángulo
n = 4 ...... cuadrilátero
n = 5 ...... pentágono
n = 6 ...... hexágono
n = 7 ...... heptágono
n = 8 ...... octógono
n = 9 ...... eneágono
n = 10 ...... decágono
n = 12 ...... dodecágono
etc.....

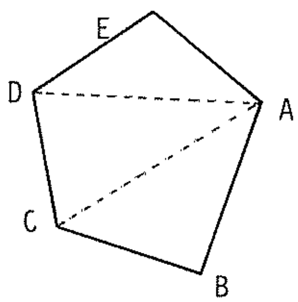
Se define el PERIMETRO de un polígono como la suma de las longitudes de sus lados.

En un polígono regular podemos trazar las mediatrices de dos lados cualquiera. El punto donde se cortan es el CENTRO del polígono, que coincide con los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita a dicho polígono.

Llamamos RADIO del polígono a la distancia entre el centro y uno cualquiera de sus vértices. Coincide con el radio de la circunferencia circunscrita.

Llamamos APOTEMA de un polígono a la distancia entre el centro del polígono y el punto medio de uno cualquiera de sus lados. Coincide con el radio de la circunferencia inscrita.

DIAGONAL de un polígono es el segmento que une dos vértices no contiguos de dicho polígono. Por ejemplo AD y AC.

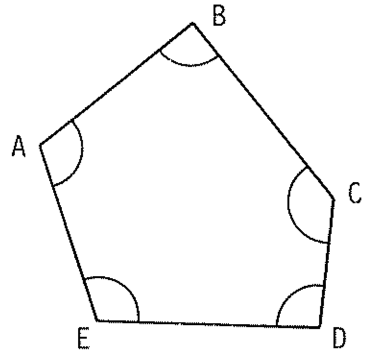


En un polígono de n lados, hay n vértices. Desde cada vértice se pueden trazar n-3 diagonales porque tenemos que descontar el propio vértice y los dos contiguos.

El mismo proceso se puede repetir para el resto de los n vértices. Además, como la diagonal AC es igual a la CA, debemos dividir por 2 el resultado anterior. Por tanto, el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo cualquiera de n lados, es de.

$$\boxed{N^{\underline{o}}\ \text{diagonales} = \frac{n.(n-3)}{2}} \qquad (4)$$

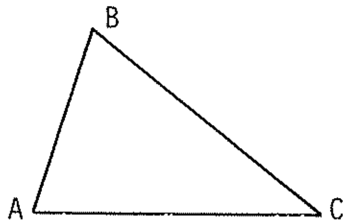
5. ANGULO INTERIOR, EXTERIOR Y CENTRAL DE UN POLIGONO



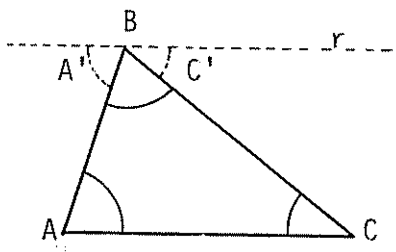
En un polígono, definimos ANGULO - INTERIOR, como el formado por dos lados contiguos. En la figura representamos - todos los ángulos interiores del polígono ABCDE.

Vamos a calcular ahora, cuánto valen los ángulos interiores de un polígono.

Para ello, comencemos hallando la suma de los ángulos interiores de un triángulo.



Sea el triángulo ABC de la figura. Tracemos por B, una línea r, paralela - al lado opuesto AC, y llamemos $\hat{A}'$ y $\hat{C}'$ los ángulos que forma con los lados concurrentes en B.



Es fácil ver que.

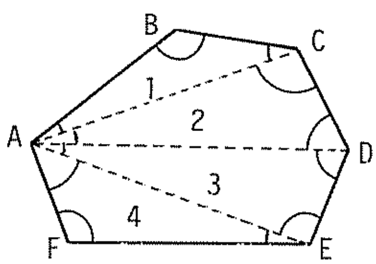
$$\hat{A}' + \hat{B} + \hat{C}' = 180^{\circ} \qquad (5)$$

Por otro lado, $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{C} = \hat{C}'$, -- por ser r y AC paralelas.

Sustituyendo en (5), obtenemos.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$$

"La suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180º".



Tomemos ahora un polígono cualquiera, por ejemplo el ABCDEF. Desde el vértice A, tracemos todas las diagonales - posibles.

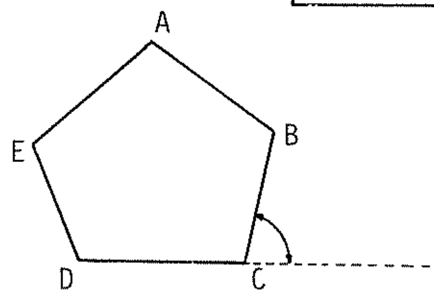
Observamos que se forman 4 triángulos. En general, en un polígono de n - lados, se formarían n-2 triángulos.

Si nos fijamos en la figura de arriba, observaremos que la suma de - los ángulos interiores del polígono coincide con la suma de los ángulos de todos los triángulos así formados. Por tanto.

$$\boxed{\text{Suma de los ángulos internos de un polígono} = 180.(n - 2)} \qquad (6)$$

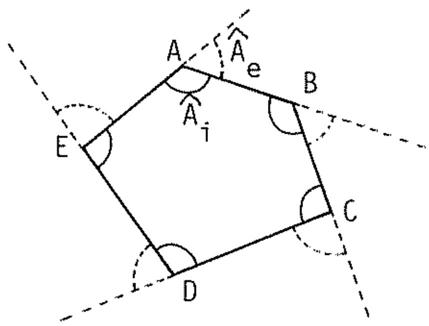
Si se trata de un polígono <u>regular</u>, todos los ángulos interiores son iguales, por consiguiente cada ángulo vale.

$$\boxed{\text{ángulo interior} = \frac{180º.(n - 2)}{n}} \qquad (7)$$



ANGULO EXTERIOR, es el formado -- por un lado y la prolongación del contiguo.

En la figura hemos representado - ángulo exterior correspondiente al vértice C.



Vamos a calcular ahora, cuánto vale - la suma de los ángulos exteriores de - un polígono.

Sea el polígono ABCDE y señalemos los ángulos exteriores e interiores.

Observando el dibujo, es fácil comprobar que en cada vértice la suma del ángulo interior y exterior vale 180º.

$$A_i + \hat{A}_e = 180º$$

Esto se repite para los <u>n</u> vértices, luego.

$$S_i + S_e = 180º.n$$

Despejando S_e (suma de los ángulos exteriores) y sustituyendo S_i (suma de los ángulos interiores), por su valor hallado en (6), tenemos.

$$S_e = 180º.n - 180º.(n - 2)$$

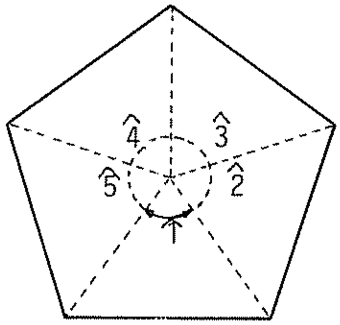
Operando queda.

$$\boxed{S_e = 360º} \qquad (8)$$

"La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo cualquiera vale 360º".

Si el polígono fuera regular, todos los ángulos exteriores son iguales y cada uno de ellos vale.

$$\boxed{\text{ángulo exterior} = \frac{360º}{n}} \qquad (9)$$



Si en un polígono regular unimos el centro de dicho polígono con cada uno de sus vértices, se forman n triángulos isósceles.

Llamamos ANGULO CENTRAL, al formado por dos radios contiguos. En la figura, los ángulos; $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ y $\hat{5}$.

La suma de todos los ángulos centrales vale 360º, según se desprende de la figura. Al ser regular, todos los ángulos centrales son iguales y por tanto, cada uno vale.

$$\boxed{\text{ángulo central} = \frac{360^{\circ}}{n}} \qquad (10)$$

A la vista de las expresiones (9) y (10), llegamos a la conclusión de que en todo polígono regular el valor del ángulo central y el exterior es el mismo.

A continuación vamos a dar una tabla con los valores de los ángulos antes mencionados, polígono por polígono.

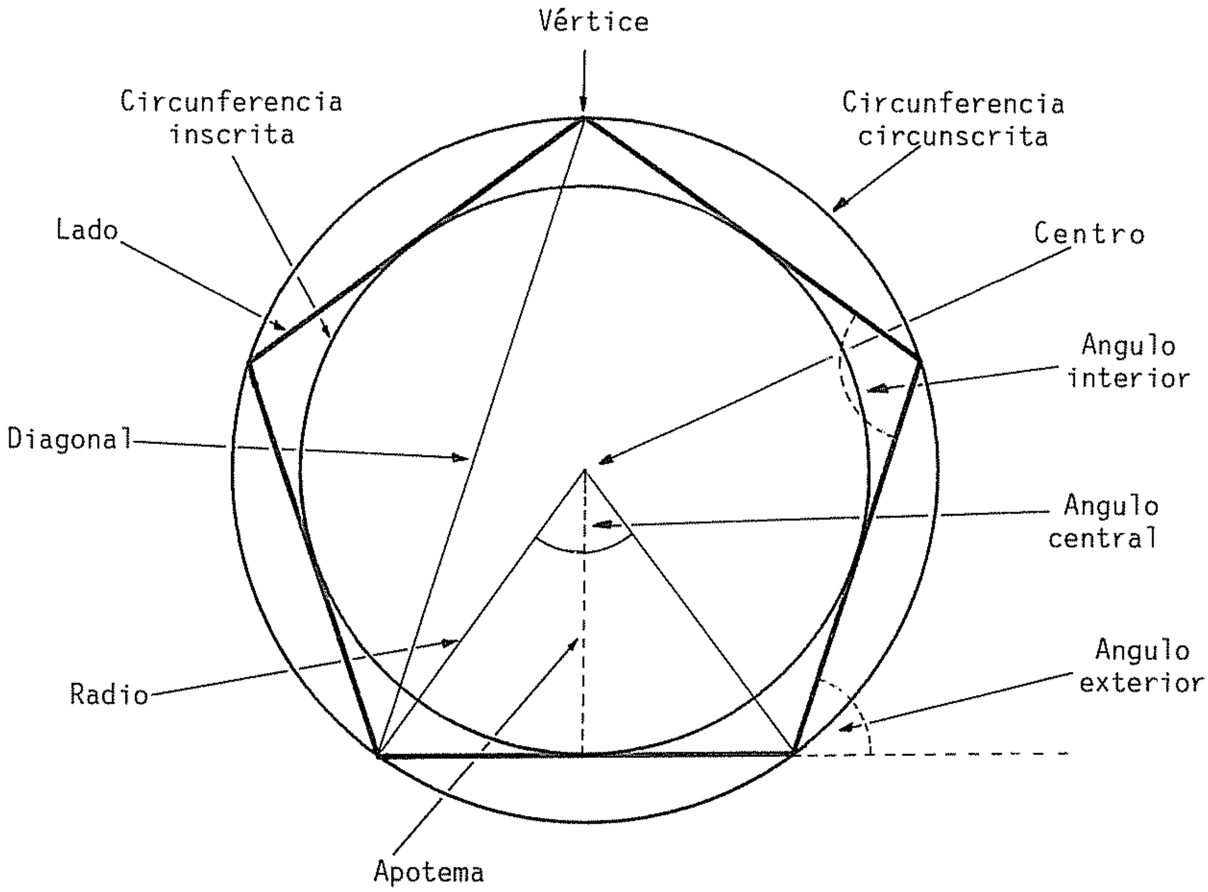
Esta tabla es de gran ayuda para resolver algunos problemas de geometría del plano y en los ejercicios de trigonometría.

TABLA CON DATOS DE INTERES DE LOS POLIGONOS REGULARES

nº lados	nombre	Suma ángulos interiores	Angulo interior	Angulo exterior	Angulo central	Nº total diagonales
3	triángulo	180º	60º	120º	120º	0
4	cuadrado	360º	90º	90º	90º	2
5	pentágono	540º	108º	72º	72º	5
6	hexágono	720º	120º	60º	60º	9
7	heptágono	900º	(900/7)º	(360/7)º	(360/7)º	14
8	octógono	1080º	135º	45º	45º	20
9	eneágono	1260º	140º	40º	40º	27
10	decágono	1440º	144º	36º	36º	35
12	dodecágono	1800º	150º	30º	30º	54

$\left(\frac{900}{7}\right)^{\circ} = 128^{\circ}\ 34'\ 17''$ $\qquad$ $\left(\frac{360}{7}\right)^{\circ} = 51^{\circ}\ 25'\ 43''$

CUADRO RESUMEN DE LOS ELEMENTOS DE LOS POLIGONOS



EJERCICIOS DEL TEMA 8

1.8: Reducir a segundos sexagesimales.

a) 30º 15' 36"
b) 25º 9' 27"
c) 10º 29' 54"
d) 47º 3' 18"

2.8: Reducir a minutos sexagesimales.

a) 23º 12' 57"
b) 14º 23' 30"
c) 14º 27' 33"
d) 2º 39' 6"

3.8: Reducir a grados sexagesimales.

a) 35º 2' 51"
b) 3º 29' 5"
c) 27º 14' 3"
d) 38º 9' 16"

4.8: Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales.

a) 269323"
b) 5326'
c) 21388'
d) 645311"

5.8: Pasar a radianes.

a) 12º
b) 150º
c) 234º
d) 351º

6.8: Pasar a radianes.

a) 51º 12' 6"
b) 43º 6' 26"
c) 17º 4' 22"
d) 27º 16' 12"

7.8: Pasar a grados, minutos y segundos sexagesimales.

a) $\frac{5\pi}{11}$ rad
b) $\frac{7\pi}{3}$ rad
c) $\frac{11\pi}{13}$ rad
d) $\frac{9\pi}{5}$ rad

8.8: ¿Cuál es la longitud del arco recorrido en 27 minutos por la punta de la saeta del minutero de un reloj si la saeta mide 2,61 cm?.

9.8: La longitud de un arco de circunferencia es de 4 cm. Si el ángulo que abarca es de 30º 12', hallar el radio de dicha circunferencia.

10.8: En una circunferencia de 2 m de radio se toma un arco de 1,25 m de longitud. Los puntos extremos los unimos al centro de la circunferencia. ¿Cuál es el valor, en grados sexagesimales, del ángulo así formado?.

Dados los ángulos:

$\hat{A}$ = 59º 15' 30"
$\hat{B}$ = 30º 28' 17"
$\hat{C}$ = 123º 41' 27"
$\hat{D}$ = 150º 3' 45"
$\hat{E}$ = 241º 38' 19"
$\hat{F}$ = 309º 40' 31"

Realizar las siguientes operaciones:

11.8: $\hat{A} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$

12.8: $\hat{B} + \hat{F} - \hat{C}$

13.8: $\hat{A} - \hat{B} + \hat{C} - \hat{D}$

14.8: $(2.\hat{A} + \hat{B}) : 6$

15.8: $(3.\hat{B} - \hat{A}) : 3 + \hat{D}$

16.8: $\hat{F} - (\hat{E} - 4.\hat{B})$

17.8: $(\hat{E} - \hat{D}) : 4 -(\hat{C} - \hat{A}) : 3$

18.8: $6.\hat{D} - \hat{E} - \hat{F}$

19.8: $(4.\hat{B} - \hat{A}) : 5 + (\hat{F} - \hat{E}) : 12$

20.8: $(\hat{F} - \hat{C} + \hat{D} - \hat{E}) : 2$

21.8: Hallar el ángulo complementario de.
a) $\hat{A}$.
b) $\hat{B}$.

22.8: Hallar el ángulo suplementario de:
a) $\hat{A}$.
b) $\hat{B}$.
c) $\hat{C}$.
d) $\hat{D}$.

23.8: Hallar el complemento y el suplemento de un ańgulo que vale los $\frac{6}{15}$ de recto.

24.8: Dos rectas se cortan formando 4 ángulos. Si uno de ellos vale 36º 44' 13" ¿Cuánto valen los otros tres?.

25.8: En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide 56º 13' 22". ¿Cuánto vale el otro ángulo agudo?.

26.8: Si el ángulo exterior de un polígono regular mide 72º. ¿Cuántas diagonales tiene el polígono?.

27.8: En un pentágono irregular, cuatro de sus ángulos internos miden 480º 13' 26". ¿Cuánto vale el 5º ángulo?.

28.8: ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular si cinco de sus ángulos miden 700º?.

29.8: ¿Existe algún polígono regular cuyos ángulos interiores midan 155º?.¿Por qué?.

30.8: Queremos embaldosar una habitación con ladrillos en forma de polígono regular. ¿Con qué tipo de polígonos es posible realizar la obra sin dejar huecos?.

31.8: La suma de los ángulos internos de un polígono regular convexo es de 2160º. Hallar.
a) el número de lados.
b) el ángulo central.
c) el ángulo exterior.
d) el número total de diagonales.

32.8: Demostrar que en un hexágono el lado coincide con el radio