TEMA 9

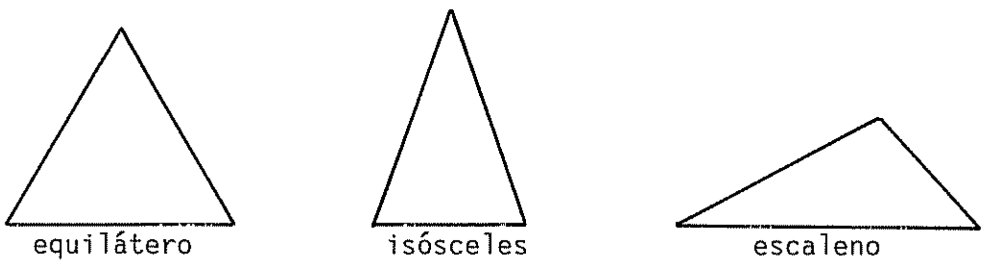
ESTUDIO DEL TRIANGULO

1. INTRODUCCION

El triángulo es el polígono más simple. Está formado por tres lados, la suma de sus ángulos interiores es de 180º y en su interior no podemos trazar ninguna diagonal.

Los triángulos los podemos clasificar en:

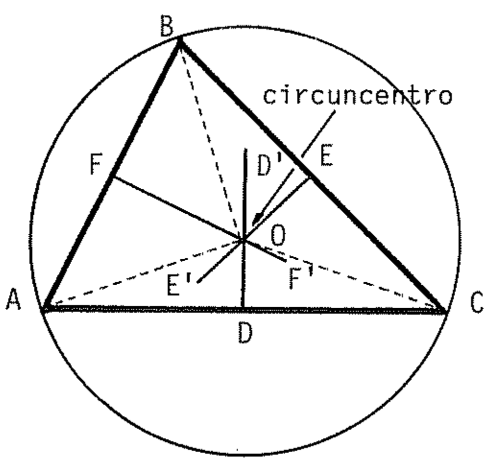
- Equiláteros, cuando sus tres lados son iguales. En este caso, los tres ángulos también lo son y su valor es de 60º.
- Isósceles, tienen dos lados y dos ángulos iguales.
- Escalenos, cuando tienen los tres lados desiguales.



En todo triángulo podemos definir una serie de puntos y segmentos notables, cuyas propiedades vamos a enunciar.

2. ELEMENTOS NOTABLES DE LOS TRIANGULOS

a) Mediatrices; circuncentro



MEDIATRIZ de un segmento es la perpendicular a dicho segmento, trazada desde su punto medio. En la figura representamos las tres mediatrices; DD', EE' y FF', a los lados del triángulo.

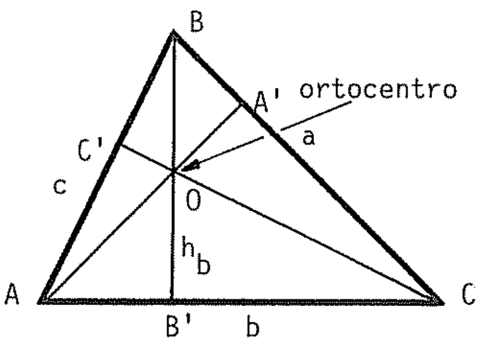
Se puede demostrar que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un mismo punto, llamado CIRCUNCENTRO.

Dicho punto pertenece a las tres medianas y por definición de mediana, es fácil ver que.

$$OA = OB = OC$$

Es decir, el punto O equidista de los tres vértices, luego se puede trazar una circunferencia de centro O que pase por A, por B y por C. Dicha circunferencia es la circunscrita al triángulo.

b) Alturas; ortocentro.



ALTURA, correspondiente a un lado de un triángulo es la perpendicular trazada a dicho lado desde el vértice opuesto.

En la figura se han representado las tres alturas; AA', BB' y CC'. Se puede demostrar que las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto, el O, al que llamaremos ORTOCENTRO.

Conocidas las longitudes de los tres lados, a, b y c, y haciendo

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Se pueden calcular las tres alturas, h_a, h_b y h_c, sin más que aplicar las expresiones:

$$\boxed{\begin{aligned} h_a &= \frac{2}{a}.\sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)} \\ h_b &= \frac{2}{b}.\sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)} \\ h_c &= \frac{2}{c}.\sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)} \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (1) \\ (2) \\ (3) \end{aligned}$$

Conocida la altura, es fácil calcular el área del triángulo.

$$A = \frac{1}{2}.b.h_b$$

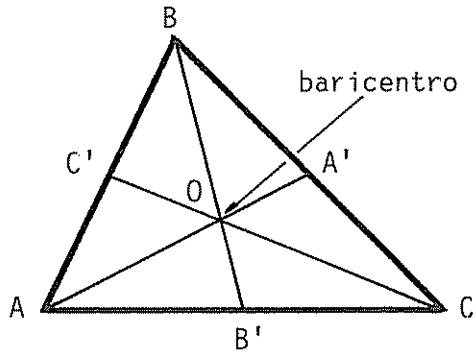
Sustituyendo el valor de h_b.

$$A = \frac{1}{2}.b.\frac{2}{b}.\sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}$$

$$\boxed{A = \sqrt{p.(p - a).(p - b).(p - c)}} \qquad (4)$$

Que es la llamada "fórmula de Herón de Alejandría", la cual nos permite hallar el área de un triángulo, sin más que conocer los tres lados.

c) Medianas; baricentro.



MEDIANA de un triángulo es el segmento formado al unir un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Las medianas del triángulo ABC, son los segmentos AA', BB' y CC'.

Se puede demostrar que las tres medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto, el O, llamado BARICENTRO.

Este punto tiene la propiedad de ser el centro de gravedad del triángulo. Si recortamos un triángulo de cartulina y trazamos sus medianas, al suspenderlo del punto donde se cortan, baricentro, el triángulo se queda en equiliibrio.

Conocidos los tres lados del triángulo, se pueden hallar sus medianas, aplicando las expresiones:

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} \qquad (5)$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} \qquad (6)$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} \qquad (7)$$

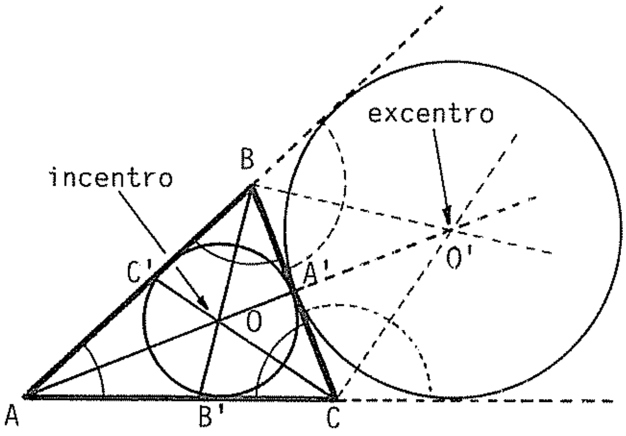
Por otro lado, el baricentro se encuentra a una distancia del vértice, igual a los $\frac{2}{3}$ del valor de la mediana. Es decir.

$$OB = \frac{2}{3} BB' \qquad OB' = \frac{1}{3} BB'$$

$$OC = \frac{2}{3} CC' \qquad OC' = \frac{1}{3} CC'$$

$$OA = \frac{2}{3} AA' \qquad OA' = \frac{1}{3} AA'$$

d) Bisectrices; incentro y excentro.



BISECTRIZ de un ángulo es la recta que divide al ángulo en dos mitades.

En el triángulo ABC, los segmentos AA', BB' y CC', dividen en dos a los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, respectivamente.

Se puede demostrar que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un mismo punto, el O, llamado INCENTRO.

El incentro equidista de los tres lados. Por tanto, es el centro de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

Por otra parte, si hallamos las bisectrices de dos ángulos exteriores del triángulo y prolongamos la bisectriz del ángulo interior opuesto, comprobaremos que se cortan en un mismo punto, llamado EXCENTRO. Dicho punto es el centro de la circunferencia tangente a un lado del triángulo y la prolongación de los otros dos.

CUADRO RESUMEN

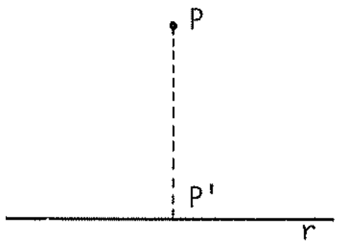
Mediatriz: Perpendicular al punto medio del lado.
Se cortan en el circuncentro que es el centro de la circunferencia circunscrita.

Altura: Perpendicular desde un vértice al lado opuesto.
Se cortan en el ortocentro.
Se calculan mediante las expresiones; (1), (2) y (3).

Mediana: Une el vértice con el punto medio del lado opuesto.
Se cortan en el baricentro, que es el c.d.g. del triángulo.
Se calculan mediante las expresiones; (5), (6) y (7).
El baricentro está a 2/3 del vértice y a 1/3 del lado.

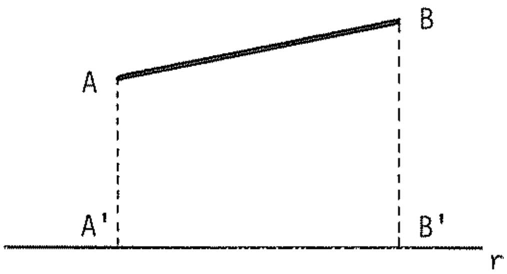
Bisectriz: Divide el ángulo en dos mitades.
Se cortan en el incentro que es el centro de la circunferencia inscrita.
Las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz del ángulo interior opuesto se cortan en el excentro.

3. PROYECCIONES



Dado un punto P, exterior a la recta r. La proyección de P sobre r es el pie, P', de la perpendicular trazada a r desde P.

La proyección de un segmento AB, sobre la recta r, es el segmento -- A'B', proyecciones de los puntos extremos A y B sobre r.

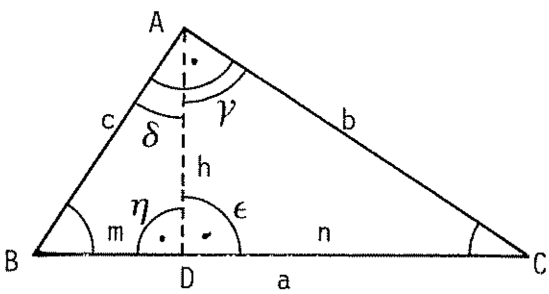


A la vista de la figura, es fácil darse cuenta que la proyección de un -- segmento sobre una recta es siempre menor o igual a dicho segmento.

Físicamente, podemos imaginar la proyección, como la sombra que proyecta un cuerpo cuando es iluminado desde arriba por un foco que emite rayos de luz, paralelos entre sí y perpendiculares a r.

4. RELACIONES METRICAS EN LOS TRIANGULOS RECTANGULOS

a) Teorema del cateto.



Si tomamos un triángulo rectángulo y lo apoyamos sobre su hipotenusa, como se indica en la figura, observaremos -- que las proyecciones de los catetos c y b, son los segmentos m y n, respectivamente.

Estudiemos las relaciones existentes entre estos segmentos y la hipotenusa.

En primer lugar, comparemos el triángulo pequeño de la izquierda, el ABD, con el triángulo grande, ABC.

Los triángulos ABD y ABC son semejantes por:

- ser rectángulos, $\hat{\eta} = \hat{A}$
- tener un ángulo común, el $\hat{B}$.
- tener un tercer ángulo igual, $\hat{\delta} = \hat{C}$, por tener los lados perpendiculares entre sí.

En definitiva, ambos triángulos tienen los ángulos homólogos iguales, luego son semejantes.

Si son semejantes, podemos escribir la relación de proporcionalidad entre los lados homólogos.

$$\frac{\text{hipotenusa del triángulo grande}}{\text{hipotenusa del triángulo pequeño}} = \frac{\text{cateto pequeño del triángulo grande}}{\text{cateto pequeño del triángulo pequeño}}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

Y quitando denominadores.

$$\boxed{c^2 = a.m} \qquad (8)$$

Comparemos ahora, el triángulo pequeño de la derecha, el ACD, con el triángulo grande ABC.

Los triángulos ACD y ABC son semejantes por:

- ser rectángulos $\hat{\epsilon} = \hat{A}$
- tener un ángulo común, el $\hat{C}$.
- tener un tercer ángulo igual, $\hat{\gamma} = \hat{B}$, por tener los lados perpendiculares entre sí.

Como los dos triángulos tienen los ángulos homólogos iguales, son semejantes.

Si son semejantes, escribamos la relación de proporcionalidad entre sus lados homólogos.

$$\frac{\text{hipotenusa del triángulo grande}}{\text{hipotenusa del triángulo pequeño}} = \frac{\text{cateto grande del triángulo grande}}{\text{cateto grande del tiriángulo pequeño}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

Quitando denominadores, queda.

$$\boxed{b^2 = a.n} \qquad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9), son las expresiones matemáticas del teorema del cateto, que puede enunciarse como: "En todo triángulo rectángulo, el — cuadrado de un cateto es igual a la hipotenusa por la proyección de ese cateto sobre ella".

Ejemplo 1: En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 m y la proyección de un cateto sobre ella, 5 m. Hallar el valor de dicho cateto.

Aplicando el teorema del cateto.

$$c^2 = a.m$$

Sustituyo los datos del problema.

$$c^2 = 13.5$$

$$c^2 = 65$$

$$c = \sqrt{65} = \underline{8{,}06\ m}$$

Escribamos de nuevo las expresiones (8) y (9).

$$c^2 = a.m$$

$$b^2 = a.n$$

Dividimos miembro a miembro estas dos igualdades.

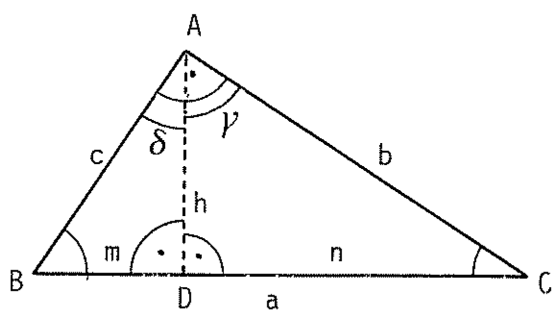
$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{a.m}{a.n}$$

Extrayendo la raíz cuadrada.

$$\boxed{\frac{c}{b} = \sqrt{\frac{m}{n}}} \qquad (10)$$

Expresión que relaciona los dos catetos de un triángulo rectángulo y sus respectivas proyecciones sobre la hipotenusa.

b) <u>Teorema de la altura</u>.



Vamos a estudiar ahora la relación existente entre la altura $\underline{h}$, sobre la hipotenusa y los segmentos $\underline{m}$ y $\underline{n}$.

Comparemos los dos triángulos pequeños, el ABD y el ACD.

El triángulo ABD es semejante al ACD porque.

- ambos son rectángulos en D.
- $\hat{B} = \hat{\gamma}$ por tener los lados perpendiculares entre sí.
- $\hat{C} = \hat{\delta}$ " " " " " " ".

Los dos triángulos tienen los tres ángulos homólogos iguales, por tanto, son semejantes.

Si son semejantes podemos escribir la relación de proporcionalidad entre los lados homólogos.

$$\frac{\text{cateto grande del triángulo de la izquierda}}{\text{cateto grande del triángulo de la derecha}} = \frac{\text{cateto pequeño del triángulo de la izqda.}}{\text{cateto pequeño del triángulo de la dcha.}}$$

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

Quitando denominadores, nos queda.

$$\boxed{h^2 = m.n} \qquad (11)$$

Expresión matemática del teorema de la altura, que puede enunciarse como: "En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es igual al producto de los dos segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa".

Ejemplo 2: Hallar la altura sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo si los segmentos en que ésta es dividida por la altura valen, 4 y 36 cm respectivamente.

Utilizo la expresión (11).

$$h^2 = m.n$$

Sustituyendo los datos del problema, tenemos.

$$h^2 = 4.36$$

$$h^2 = 144$$

$$h = \sqrt{144} = \underline{12\ cm}$$

Vamos a escribir ahora, las ecuaciones (8) y (9) y las vamos a multiplicar entre sí, miembro a miembro.

$$c^2 = a.m$$
$$b^2 = a.n$$

$$c^2.b^2 = a^2.m.n$$

Como, según el teorema de la altura, $h^2 = m.n$. Sustituyendo arriba.

$$c^2.b^2 = a^2.h^2$$

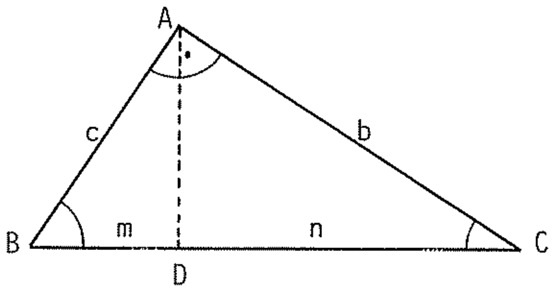
Extrayendo la raíz cuadrada en ambos lados, queda finalmente.

$$\boxed{c.b = a.h} \qquad (12)$$

"El producto de los dos catetos es igual al producto de la hipotenusa por la altura correspondiente".

La expresión (12) sólo es cierta cuando $\underline{a}$, $\underline{b}$ y $\underline{c}$, forman un triángulo rectángulo.

c) Teorema de Pitágoras.



Tomemos ahora, las expresiones (8) y (9) del teorema del cateto.

$$c^2 = a.m$$
$$b^2 = a.n$$

Sumemos miembro a miembro estas dos igualdades.

$$c^2 + b^2 = a.m + a.n$$

Cambiemos el orden.

$$a.m + a.n = b^2 + c^2$$

Tomemos la hipotenusa a, como factor común.

$$a.(m + n) = b^2 + c^2$$

Como m + n = a, sustituyendo arriba.

$$a.a = b^2 + c^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad (13)$$

La expresión anterior constituye la expresión matemática del teorema de Pitágoras, que puede enunciarse como: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

De (13), podemos despejar el valor de la hipotenusa.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \qquad (14)$$

O, los catetos.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad (15)$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \qquad (16)$$

Ejemplo 3: Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo si los catetos miden 6 y 8 metros.

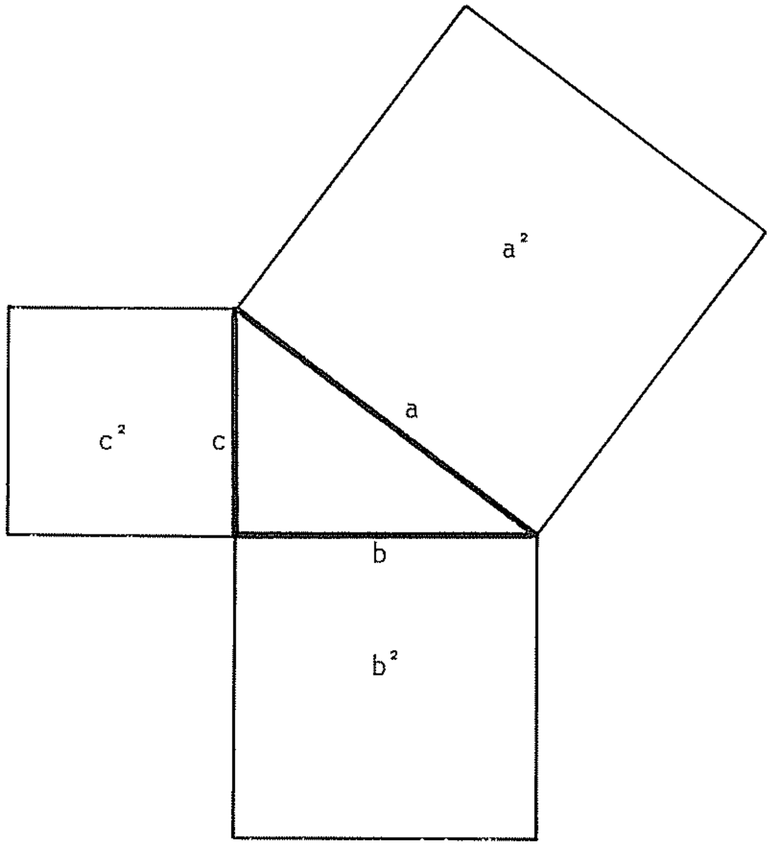
Utilizando (14) y sustituyendo los datos del problema.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = \underline{10\ m}$$

El teoremas de Pitágoras es quizá el más usado en geometría elemental. Su antigüedad se remonta a las antiguas culturas egipcias quienes utilizaban triangulaciones en ángulo recto, para volver a situar los límites de sus tierras, cuando las inundaciones periódicas del Nilo deshacían las marcas.

A Pitágoras, sabio griego que vivió hace unos 2.500 años, se le atribuye la demostración general de esta curiosa propiedad.

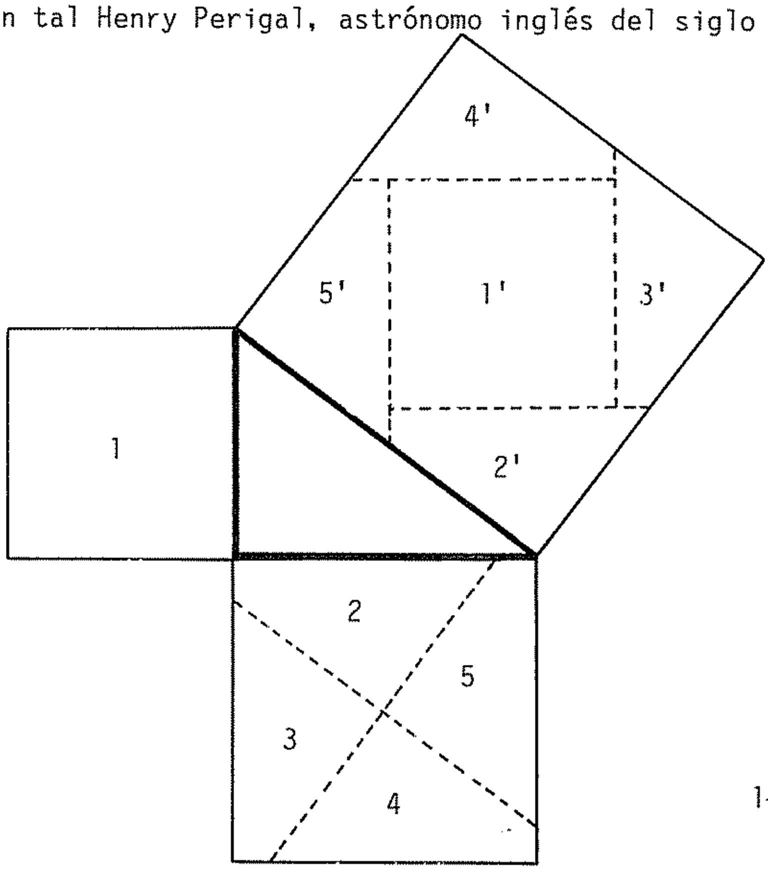
Sin embargo, él no utilizó métodos algebraicos, sino un método gráfico consistente en comprobar que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.



Esto es:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Existen muchas formas de demostrarlo. Una de las más elegantes se debe a un tal Henry Perigal, astrónomo inglés del siglo pasado.



Por el centro del cuadrado construido sobre el cateto mayor, se trazan paralelas a los lados del cuadrado construido sobre la hipotenusa. Se forman 4 trapecios que junto con el cuadrado construido sobre el cateto menor, encajan perfectamente en el cuadrado costruido sobre la hipotenusa. Es decir:

$$1+2+3+4+5 = 1'+2'+3'+4'+5'$$

EJERCICIOS DEL TEMA 9

1.9: En un triángulo rectángulo la hipotenusa vale 125 m y un cateto 35 m. Hallar la proyección de dicho cateto sobre ella.

2.9: Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa están en la relación 1:4. Si un cateto mide 3 m. ¿Cuánto mide el otro?.

3.9: El producto de los dos catetos de un triángulo rectángulo vale 16800. Si la hipotenusa vale 250 m. ¿Cuañto mide la altura?.

4.9: Hallar diez valores enteros distintos, para la hipotenusa y los dos catetos, tal que formen triángulos rectángulos.

5.9: ¿Es finito o infinito?, el número de soluciones <u>enteras</u> de la ecuación $a^2 = b^2 + c^2$. ¿Por qué?.

6.9: Si en un triángulo rectángulo se duplica la longitud de los catetos. ¿En qué medida se ve afectada la hipotenusa.

7.9: Si los dos catetos son racionales e iguales, la altura correspondiente a la hipotenusa es también un número racional. ¿Por qué?.

8.9: Las proyecciones sobre la hipotenusa de los catetos valen; 5,88 y 69,12 metros, respectivamente. Hallar dichos catetos.

9.9: La altura sobre la hipotenusa vale 14,4 m y un cateto 18 m. Hallar el o-- tro cateto y la hipotenusa.

10.9: Si la hipotenusa vale 25 m y un cateto 7 m. ¿Cuánto vale el otro cateto?.

11.9: Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos, 20 m y 99 m

12.9: Hallar el perímetro de un triángulo rectángulo si sus catetos miden 19 y 180 metros.

13.9: Los dos catetos de un triángulo rectángulo están en la relación 1:3. Si - la altura sobre la hipotenusa es de 4 m. Hallar dicha hipotenusa.

14.9: Sobre un segmento BC y a 7,84 m de B, se levanta una perpendicular DA de 26,88 m. Al unir el punto <u>A</u> con el <u>B</u> y el <u>C</u>, se forma el triángulo rectángulo ABC. Hallar los catetos y la hipotenusa de dicho triángulo

15.9: Un cateto mide 24 m y su proyección sobre la hipotenusa 23,04 m. Hallar - el otro cateto, la hipotenusa y la altura sobre ella.

16.9: Hallar el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles si la hipotenusa vale $7\sqrt{2}$ metros.

17.9: ¿Por qué no pueden existir triángulos equiláteros rectángulos?.

18.9: En un triángulo rectángulo isósceles, un cateto mide $2\sqrt{2}$ metros. ¿Cuánto vale el perímetro de dicho triángulo?.

19.9: Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa valen; 9,8 y 115,2 m. Hallar los dos catetos y la altura sobre la hipotenusa.