LEONHARD EULER

El número "e", debe su nombre al famoso matemático suizo Leonhard Euler.

Leonhard Euler, fue hijo de un clérigo, que vivía en los alrededores de Basilea. Su talento natural para las matemáticas se evidenció pronto por el afán y la facilidad con que dominaba los elementos, bajo la tutela de su padre .

A una edad temprana fue enviado a la Universidad de Basilea, donde atrajo la atención de Jean Bernoulli. Inspirado por un maestro así, maduró rápidamente, a los 17 años de edad, cuando se graduó Doctor, provocó grandes aplausos con un discurso probatorio, el tema del cual era una comparación entre los sistemas cartesiano y newtoniano.

Su padre deseaba que ingresara en el sagrado ministerio, y orientó a su hijo hacia el estudio de la teología. Pero , al contrario del padre de Bernoulli, abandonó sus ideas cuando vio que el talento de su hijo iba en otra dirección. Leonhard fue autorizado a reanudar sus estudios favoritos y, a la edad de diecinueve años, envió dos disertaciones a la Academia de París, una sobre arboladura de barcos, y la otra sobre la filosofía del sonido. Estos ensayos marcan el comienzo de su espléndida carrera.

Por esta época decidió dejar su país nativo, a consecuencia de una aguda decepción, al no lograr un profesorado vacante en Basilea. Así, Euler partió en 1727, año de la muerte de Newton, a San Petersburgo, para reunirse con sus amigos, los jóvenes Bernoulli, que le habían precedido allí algunos años antes.

En el camino hacia Rusia, se enteró de que Nicolás Bernoulli había caído víctima del duro clima nórdico; y el mismo día que puso pie sobre suelo ruso murió la emperatriz Catalina, acontecimiento que amenazó con la disolución de la Academia, cuya fundación ella había dirigido. Euler, desanimado, estuvo a punto de abandonar toda esperanza de una carrera intelectual y alistarse en la marina rusa. Pero, felizmente para las matemáticas, Euler obtuvo la cátedra de filosofía natural en 1730, cuando tuvo lugar un cambio en el sesgo de los asuntos públicos. En 1733 sucedió a su amigo Daniel Bernoulli, que deseaba retirarse, y el mismo año se casó con

Mademoiselle Gsell, una dama suiza, hija de un pintor que había sido llevado a Rusia por Pedro el Grande.

Dos años más tarde, Euler dio una muestra insigne de su talento, cuando efectuó en tres días la resolución de un problema que la Academia necesitaba urgentemente, pese a que se le juzgaba insoluble en menos de varios meses de labor. Pero el esfuerzo realizado tuvo por consecuencia la pérdida de la vista de un ojo. Pese a esta calamidad, prosperó en sus estudios y descubrimientos; parecía que cada paso no hacía más que darle fuerzas para esfuerzos futuros. Hacia los treinta años de edad, fue honrado por la Academia de París, recibiendo un nombramiento; asimismo Daniel Bernoulli y Collin Maclaurin, por sus disertaciones sobre el flujo y el reflujo de las mareas. La obra de Maclaurin contenía un célebre teorema sobre el equilibrio de esferoides elípticos; la de Euler acercaba bastante la esperanza de resolver problemas relevantes sobre los movimientos de los cuerpos celestes.

En el verano de 1741, el rey Federico el Grande invitó a Euler a residir en Berlín. Esta invitación fue aceptada, y Euler vivió en Alemania hasta 1766. Cuando acababa de llegar, recibió una carta real, escrita desde el campamento de Reichenbach, y poco después fue presentado a la reina madre, que siempre había tenido un gran interés en conversar con hombres ilustres. Aunque intentó que Euler estuviera a sus anchas, nunca logró llevarle a una conversación que no fuera en monosílabos. Un día, cuando le preguntó el motivo de esto, Euler replicó: "Señora, es porque acabo de llegar de un país donde se ahorca a todas las personas que hablan". Durante su residencia en Berlín, Euler escribió un notable conjunto de cartas, o lecciones, sobre filosofía natural, para la princesa de Anhalt Dessau, que anhelaba la instrucción de un tan gran maestro. Estas cartas son un modelo de enseñanza clara e interesante, y es notable que Euler pudiera encontrar el tiempo para un trabajo elemental tan minucioso como éste, en medio de todos sus demás intereses literarios.

Su madre viuda vivió también en Berlín durante once años, recibiendo asiduas atenciones de su hijo y disfrutando del placer de verle universalmente estimado y admirado. En Berlín, Euler intimó con M. de Maupertuis, presidente de la Academia, un francés de Bretaña, que favorecía especialmente a la filosofía newtoniana, de preferencia a la cartesiana . Su influencia fue importante, puesto que la ejerció en una época en que la opinión continental aún dudaba en aceptar las opiniones de Newton. Maupertuis impresionó mucho a Euler con su principio favorito del mínimo esfuerzo, que Euler empleaba con buenos resultados en sus problemas mecánicos.

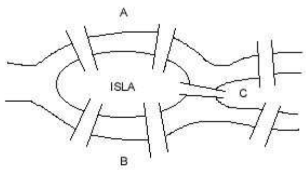
Un hecho que habla mucho en favor de la estima en que tenía a Euler, es que cuando el ejército ruso invadió Alemania en 1760 y saqueó una granja perteneciente a Euler, y el acto llegó al conocimiento del general, la pérdida fue inmediatamente remediada, y a ello se añadió un obsequio de cuatro mil florines, hecho por la emperatriz Isabel cuando se enteró del suceso. En 1766 Euler volvió a San Petersburgo, para pasar allí el resto de sus días, pero poco después de su llegada perdió la vista del otro ojo. Durante algún tiempo, se vio obligado a utilizar una pizarra, sobre la cual realizaba sus cálculos, en grandes caracteres. No obstante, sus discípulos e hijos copiaron luego su obra, escribiendo las memorias exactamente como se la dictaba Euler. Una obra magnífica, que era en extremo sorprendente, tanto por su esfuerzo como por su originalidad. Euler poseyó una asombrosa facilidad para los números y el raro don de realizar mentalmente cálculos de largo alcance. Se recuerda que en una ocasión, cuando dos de sus discípulos, al realizar la suma de unas series de diecisiete términos, no estaban de acuerdo con los resultados en una unidad de la quincuagésima cifra significativa, se recurrió a Euler. Este repasó el cálculo mentalmente, y su decisión resultó ser correcta.

En 1771, cuando estalló un gran fuego en la ciudad, llegando hasta la casa de Euler, un compatriota de Basilea, Peter Grimm, se arrojó a las llamas, descubrió al hombre ciego, y lo salvó llevándolo sobre sus hombros. Si bien se perdieron los libros y el mobiliario, se salvaron sus preciosos escritos. Euler continuó su profuso trabajo durante doce años, hasta el día de su muerte, a los setenta y seis años de edad.

Euler era como Newton y muchos otros, un hombre capacitado, que había estudiado anatomía, química y botánica. Como se dice de Leibniz, podría repetir la Eneida, del principio hasta el fin, e incluso podría recordar las primeras y las últimas líneas de cada página de la edición que solía utilizar. Esta capacidad parece haber sido el resultado de su maravillosa concentración, aquel gran elemento del poder inventivo, del que el mismo Newton ha dado testimonio, cuando los sentidos se encierran en intensa meditación y ninguna idea externa puede introducirse. La apacibilidad de ánimo, la moderación y la sencillez de las costumbres fueron sus características. Su hogar era su alegría, y le gustaban los niños. Pese a su desgracia, fue animoso y alegre, poseyó abundante energía; como ha atestiguado su discípulo M. Fuss, "su piedad era racional y sincera; su devoción, ferviente".

SU OBRA

- Sólido Rígido: Definió los tres ángulos de Euler para describir la posición. Publicó el teorema principal del movimiento (siempre existe un eje de rotación instantáneo). Solución del movimiento libre (consiguió despejar los ángulos en función del tiempo)
- Ecuaciones diferenciales: Se llama método de Euler al método numérico consistente en ir incrementando paso a paso la variable independiente y hallando la siguiente imagen con la derivada.
- Publicó trabajos sobre el movimiento de la luna.
- Problema de los puentes de Königsberg. Demostró que un esquema de dichos puentes no podia recorrerse. Este problema pudo haber sido la primera aplicación en teoría de grafos o en topología.



- Geometría: Desarrolló lo que se llama característica de Euler. Básicamente es buscar una relación entre número de caras, aristas y vértices en los poliedros. Utilizó esta idea para demostrar que no existían más poliedros regulares que los conocidos hasta entonces.

$$C + V = A + 2$$

- Recta de Euler
- Identidad de Euler
- Fórmula de Euler
- Problema de los puentes de Königsberg
- Función Fi de Euler

HISTORIA DEL NÚMERO e

Primer ejemplo. Crecimiento de un capital

En el siglo XVII los matemáticos se preguntaban. ¿Con arreglo a qué ley aumentaría un capital colocado a interés compuesto si el interés se acumulara a cada momento al capital?. Es decir, sin esperar a transcurrir un año, sino desde el momento que comenzara a producir intereses.

Por ejemplo, 1 € colocado al 100%, al cabo de un año, tendríamos 1 + 1 = 2 €.

Colocados de nuevo al 100%, tendríamos al cabo del segundo año 2 + 2 = 4 €

Al tercer año 4 + 4 = 8 €.

En general, al cabo de n años tendríamos $(1 + 1)^n$ euros.

Pero, ¿por qué hacer la acumulación al cabo de 1 año?. ¿Por qué no hacerla al cabo de 6 meses ($\frac{1}{2}$ año)?.

En ese caso, nuestro euro al cabo de 6 meses habría producido 0,5 € y el capital total se habría convertido en $(1 + \frac{1}{2})$ euros. Pero este capital estaría ahora produciendo intereses durante el medio año restante, lo que resultaría $\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2})$ euros.

En total.

$$(1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2}) \cdot (1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2{,}25 \text{ €}$$

¿Y si hiciéramos la acumulación día a día?

$$\left[1 + \frac{1}{365}\right]^{365}$$

¿Y si la hiciéramos hora a hora?

$$\left[1+\frac{1}{8760}\right]^{8760}$$

¿Y si la hiciéramos segundo a segundo?

$$\left[1+\frac{1}{31536000}\right]^{31536000}$$

Curiosamente, por más que subdividamos el tiempo, el capital no crece indefinidamente, sino que la sucesión de término general.

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n} \qquad \text{con n} \Rightarrow \infty$$

Se mantiene por debajo de un cierto límite.

Segundo ejemplo. Crecimiento de una población

Sea una población de 1.000.000 de individuos que tiene una tasa de crecimiento del 100% cada generación (30 años).

Al cabo de 30 años la población será de.

$$1.000.000 + 1.000.000 \text{ habitantes}$$

$$1.000.000 \cdot (1 + 1) \text{ habitantes}$$

La generación siguiente, al cabo de otros 30 años, serán.

$$1.000.000 \cdot (1 + 1)^2 \quad \text{habitantes}$$

Tras n generaciones, la población será de.

$$1.000.000 \cdot (1 + 1)^n$$

Si en vez de esperar una generación, procedemos a acumular la población anualmente, obtenemos al final del primer año.

$$1.000.000 \cdot \left[1+\frac{1}{30}\right] \text{habitantes}$$

Y al cabo de una generación, 30 años, procediendo a la acumulación al final de cada año.

$$1.000.000 \cdot \left[1+\frac{1}{30}\right]^{30} \text{ habitantes}$$

Si acumuláramos la población diariamente, al cabo de 30 años tendríamos.

$$1.000.000 \cdot \left[1+\frac{1}{30\cdot 365}\right]^{30\cdot 365} \text{ habitantes}$$

Y en general.

$$1.000.000 \cdot \left[1+\frac{1}{n}\right]^{n} \text{ habitantes}$$

Cuando n se hace tan grande como queramos.

Tercer ejemplo. Crecimiento de una colonia de bacilos

Tomemos ahora el caso de un cultivo de bacilos. Cada bacilo se multiplica por división. De uno, resultan dos, de éstos otros dos, y así sucesivamente. Admitamos que el proceso de división tuviera lugar de 15 en 15 minutos.

Al cabo de 15 minutos tendríamos.

$$1 + 1 \text{ bacilos.}$$

Al siguiente cuarto de hora.

$$(1 + 1) + (1 + 1) \text{ bacilos}$$

O, lo que es igual.

$$(1 + 1)^2 \text{ bacilos.}$$

Al cabo de una hora (4 cuartos) tendríamos.

$$(1 + 1)^4 \text{ bacilos}$$

Y transcurrido un día; ($4 \cdot 24 = 96$ cuartos).

$(1 + 1)^{96}$ bacilos

Calculemos ahora el crecimiento por minuto (1 minuto = $\frac{1}{15}$ cuarto de hora).

$$\left[1+\frac{1}{15}\right]^{15}$$

También en este caso, el crecimiento de la población viene determinado por el límite de la expresión.

$$\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n}$$

Cuando n se hace tan grande como queramos.

Todos estos ejemplos son casos particulares de la llamada ley del crecimiento, donde una cierta magnitud (dinero, habitantes, bacilos, etc), susceptible de multiplicarse a un ritmo constante cada cierto tiempo, el crecimiento se agrega a la población inicial y toma parte a su vez, en su multiplicación

Al límite de la sucesión de término general.

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n}$$

Lo llamamos, número **e,** o número de Euler.

Observemos, cómo va modificando su valor al ir añadiendo términos.

$$\left[1+\frac{1}{1}\right]^{1} = 2$$

$$\left[1+\frac{1}{2}\right]^{2} = 2,25$$

$$\left[1+\frac{1}{3}\right]^{3} = 2,37$$

$$\left[1+\frac{1}{4}\right]^{4} = 2,44$$

$$\left[1+\frac{1}{5}\right]^{5} = 2{,}488$$

....

$$\left[1+\frac{1}{10}\right]^{10} = 2{,}5936$$

....

$$\left[1+\frac{1}{50}\right]^{50} = 2{,}6915$$

....

$$\left[1+\frac{1}{200}\right]^{200} = 2{,}7164$$

....

Conforme mayor es n, la expresión se va haciendo mayor. Sin embargo, el valor de dicha expresión va creciendo cada vez más despacio, al crecer n. Los sucesivos valores forman una sucesión convergente acotada. El valor límite de esta sucesión recibe el nombre de número e y su valor es.

$$e = 2{,}718281828459.....$$

Es un número irracional y además trascendente. Es decir, que no es solución de ninguna ecuación polinómica de coeficientes racionales.

El número e puede expresarse como.

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.....+\frac{1}{n!}$$

Se trata de un caso particular del desarrollo en serie.

$$e^{x} = \frac{x^{0}}{0!}+\frac{x^{1}}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+.....+\frac{x^{n}}{n!}$$

La función.

$$y = e^{x}$$

Es la llamada función exponencial, cuya derivada vale.

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

En la función exponencial, su pendiente (su crecimiento) es justamente el valor de la función.

- En las catenarias, hilos colgantes, aparece la función exponencial.

$$\boxed{y = \frac{1}{a}\cdot(\cosh\ a\cdot x - 1)}$$

$$\boxed{s = \frac{1}{a}\cdot \operatorname{senh} a\cdot x}$$

$$y = \frac{1}{2a}\cdot\left(e^{ax} + e^{-ax} - 2\right)$$

$$s = \frac{1}{2a}\cdot\left[e^{ax} - e^{-ax}\right]$$

¿Existe alguna relación entre π y e?

$$\boxed{e^{2\cdot\pi\cdot i} = 1}$$

Esta es la famosísima fórmula de Euler, para muchos la fórmula más hermosa de toda la Matemática.

La cual deriva de la fórmula general.

$$e^{i\cdot x} = \cos x + i\cdot \operatorname{sen} x$$

Demostrable, haciendo el desarrollo en serie de potencias de cada término.

Una aproximación racional al número e.

$$e \cong \frac{2721}{1001}$$

Una aproximación al número e en forma de fracciones continuas.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots\ldots}}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{7}{8 + \ldots\ldots}}}}}}$$

La expresión es igualmente válida cuando se trata de un decrecimiento. En ese caso el exponente del número **e**, es negativo. Por ejemplo en los procesos de desintegración nuclear.

- Ley de desintegración radiactiva.

$$N = N_o \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

N_o ... número de átomos iniciales

N .... número de átomos finales

λ .... constante de desintegración radiactiva (propia de cada elemento químico).

- Rozamiento en correas

$$T_1 = T_2 \cdot e^{\mu \cdot \beta}$$