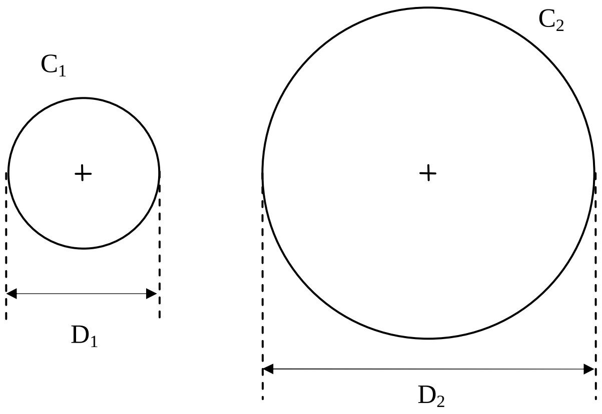
EL NÚMERO "PI" ¿UN NÚMERO IRRACIONAL?

1.- *¿Qué es el número π?*

El número π es un número muy popular en la Matemática, todos lo hemos estudiado y recordamos su valor aproximado; 3,14159...., pero ¿de dónde le viene esa popularidad y esa fascinación que ha ejercido en la mente de todos los hombres de ciencia a lo largo de los años?



Sean dos circunferencias de longitudes; C_1 y C_2 de diámetros respectivos D_1 y D_2.

Como son dos figuras semejantes, podemos establecer la relación de proporcionalidad entre su longitud y su diámetro.

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2} = \ldots$$

A esa relación de proporcionalidad, independiente del tamaño de la circunferencia, lo representamos con el símbolo π.

$$\frac{C}{D} = \pi$$

El popular signo "π" se debe al matemático William Jones (1.675-1.749) que usó la primera letra de la palabra griega periferia (περιφερια). Euler terminó de extender y generalizar este símbolo.

El problema viene ahora. ¿Cuál es el valor numérico de ese símbolo, cuánto vale π?.

No, no es una pregunta sencilla ni mucho menos. De hecho, la búsqueda de π le ha llevado milenios a la humanidad. Repasemos un poco la historia de esa búsqueda

2.- *Historia del número π*

En las tablillas babilonias se le asigna de una forma aproximada el valor 3 a la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

En la Biblia, en el libro de las Crónicas, se describe un recipiente circular que formaba parte del templo de Salomón. Allí se especifica su tamaño; "*diez codos de ancho y un cordón de 30 codos lo ceñía a su alrededor*". Es decir, asignaba el valor 3 a nuestro número π al igual como la cultura babilonia. Si recordamos el largo cautiverio de los judíos no debemos extrañarnos de la gran influencia que la cultura babilonia junto con sus mitos, costumbre y religión ejercieron sobre el pueblo hebreo.

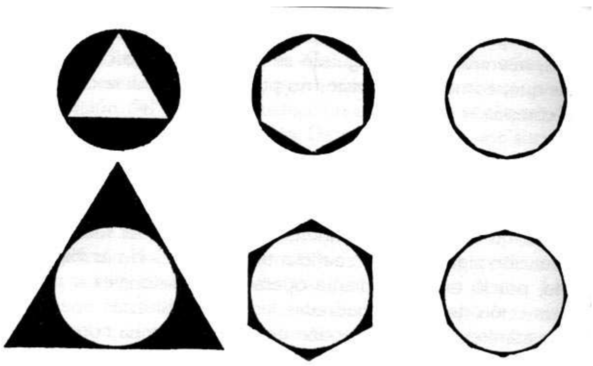
Afortunadamente, nadie tomó esas palabras de la Biblia como parte fundamental del dogma judío o cristiano, pues de lo contrario, todas las ruedas de la cristiandad debieran transformarse en bonitos pero incómodos hexágonos regulares.

Esa aproximación grosera fue mejorada posteriormente. Los arquitectos fenicios y egipcios usaban el valor.

$$\pi = \frac{22}{7} = 3{,}142857143....$$

Este valor aproximado difiere del real en poco más del 0,04%,, valor suficientemente bueno a efectos de cálculos técnicos pero los griegos sabían que ese valor no era correcto e intentaron descubrir su secreto.

En la gran pirámide de Keops la relación entre el perímetro de la base y su altura es aproximadamente el valor $2\cdot\pi$



Arquímedes de Siracusa puso cerco a la circunferencia. Inscribió un polígono regular dentro del círculo y circunscribió otro del mismo número de lados por fuera. Conociendo los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito, sabemos que el perímetro de la circunferencia se encontrará entre esos dos valores. Cuanto mayor sea el número de lados de los polígonos más precisión obtendremos.

$$\text{Perímetro}_{\text{inscrito}} < \text{Circunferencia} < \text{Perímetro}_{\text{circunscrito}}$$

Empezamos primero con un triangulo, luego un cuadrado, pentágono, hexágono, etc..., al ir aumentando el número de lados los polígonos van aproximándose a la circunferencia y consecuentemente el número π podemos aproximarlo cuanto deseemos sin más que aumentar el número de lados. Arquímedes llegó a usar un polígono de 96 lados con lo cual obtuvo para π el valor.

$$\pi = \frac{3123}{994} = 3{,}141851107....$$

Que difiere del valor verdadero en 1 parte por 12.000

En China, en el siglo V, se mejoró el método de Arquímedes cuando se descubrió la mejor aproximación a π en forma del número racional.

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}14159292...$$

Esta fracción tiene un error de 1 parte cada 12.500.000. Eso supone un error de 3 metros al medir la circunferencia terrestre, un valor despreciable e insignificante para todos menos para los matemáticos quienes sienten la necesidad de conocer la esencia del número π. ¿Tiene infinitos decimales, o en algún punto se produce un ciclo, un período?

Autor	**Lugar, tiempo**	**Valor de π**
	Mesopotamia, 2000 a.C.	3
Biblia		3
	Fenicios, egipcios	$\frac{22}{7} = 3{,}1428...$
	India, siglo V a.C.	3,088
Arquímedes	Siglo III, a.C.	$\frac{3123}{994} = 3{,}1418....$
Liu Sin	China, siglo I	3,1547
Vitruvio	Italia, siglo I	$\frac{25}{8} = 3{,}125$
Ptolomeo	Egipto, siglo II	$\frac{377}{120} = 3{,}1416...$
Brahmagupta	India, siglo VII	$\sqrt{10} = 3{,}162...$
Zu Chongzhi	China, siglo V	$\frac{355}{113} = 3{,}1415929...$
Ramanujan	India, siglo XX	$\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}} = 3{,}1415926525826....$

François Viete, el mejor matemático de todo el siglo XVI descubrió una expresión basada en el número irracional $\sqrt{2}$ para aproximarse a su valor.

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots\ldots\ldots}$$

En 1.596 el matemático holandés Ludolf Van Ceulen dedicó toda su vida a calcular los decimales de π, obteniendo 35 decimales, los cuales figuran en el epitafio de su tumba, e incluso sus compatriotas quisieron llamar en su honor número "ludolfiano" al número π.

En 1673, el matemático alemán Leibniz, descubridor junto con Newton del cálculo diferencial, dedujo la serie.

$$\pi = 4\cdot\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots\right]$$

Y John Wallis, contemporáneo del anterior dedujo el productorio.

$$\pi = 2\cdot\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\ldots\right]$$

Lord Bouncker (1.620 – 1.684) obtuvo π como una serie de fracciones sucesivas.

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\ldots\ldots}}}}}$$

Euler resolvió en 1.735 el llamado "Problema de Basilea", obteniendo el resultado de la suma infinita.

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots = \frac{1}{6}\cdot\pi^2$$

Estas series, de todas formas convergen muy lentamente. En definitiva, lo que todos los matemáticos buscaban era una progresión geométrica decreciente que permitiera calcular el número π. Es decir, se buscaba una serie cuyos términos pudieran sumarse y así expresar π en forma de fracción. Todavía existía la esperanza de que π fuera un número racional.

Abraham Sharp calculó en 1.699 las 71 primeras cifras decimales de π.

Pero en 1.761 el matemático alemán Lambert demostró que π es irracional, no existía esperanza alguna de encontrar regularidad alguna a lo largo de todos sus decimales.

El matemático inglés Shanks dedicó 20 años de su vida al cálculo de las 707 cifras decimales de π, pero cometió un error en el decimal 528 y posteriores, circunstancia que sólo pudo ponerse de manifiesto en el año 1.949 con el empleo de cerebros electrónicos.

Shanks usó una serie ideada por Machin que es la diferencia del desarrollo en serie de dos arcos tangentes.

$$\pi = 16 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

$$\pi = 16 \cdot \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right] - 4 \cdot \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \dots \right]$$

En 1.882 su colega Lindermann demostró que π además de ser irracional es trascendente. Es decir, no puede ser solución de ninguna ecuación polinómica de cualquier grado de coeficientes reales. Lindermann puso punto final al problema de la cuadratura del círculo demostrando matemáticamente su imposibilidad.

En 1.949 la computadora ENIAC trabajando 70 horas ininterrumpidamente con la serie de Machin obtuvo 2.037 decimales de π, descubriendo el error cometido por Shranks dos siglos y medio atrás.

A partir de ese momento la búsqueda de los infinitos decimales de π se convierte en un algoritmo de prueba de la velocidad de una computadora.

Pero el estudio de π no está finalizado, Emile Borel en 1.909 formalizó la normalidad de un número irracional cuando sus cifras se repiten por igual en cualquier sistema de numeración. El análisis de la frecuencia de sus cifras no ha detectado ninguna fluctuación importante, al menos en los primeros diez millones de decimales. A pesar de ello no se ha demostrado la normalidad de π.

La frecuencia de la aparición de las cifras en los primeros 200.000.000.000 decimales de π, viene indicado en la siguiente tabla.

Cifras	***Frecuencia***
0	20.000.030.841
1	19.999.914.711
2	20.000.013.697
3	20.000.069.393
4	19.999.921.691
5	19.999.917.053
6	19.999.881.515
7	19.999.967.594
8	20.000.291.044
9	19.999.869.180

A pesar de que la frecuencia de aparición de cada cifra es prácticamente igual a 0,1, **NO** está demostrada matemáticamente la *normalidad* de π. Es decir, que todas sus cifras tengan igual probabilidad de aparecer.

¿Están buscando los matemáticos alguna asimetría en su frecuencia?, ¿existe algún mensaje oculto en forma de alguna anisotropía en su estructura de número trascendente?. Sospechamos que no, pero sus cifras aparentemente aleatorias ¿encierran alguna ley física o matemática todavía desconocida?.

Considerando, como decía Newcomb, que 30 cifras decimales de π son suficientes para medir la circunferencia de todo el Universo conocido con un error microscópico, esa inútil y absurda búsqueda de los decimales de π sólo es comparable a los radiotelescopios que exploran el cielo intentando recibir algún mensaje desde lo desconocido.

3.- *Algunas curiosidades de π*

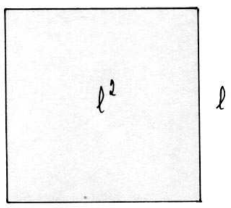
Al ser π la relación entre una longitud curva (la circunferencia) y una longitud recta (el diámetro), este valor aparecerá en todas las expresiones geométricas que describen longitudes, áreas y volúmenes de figuras y sólidos de revolución.

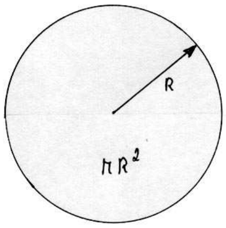
$$C = D\cdot\pi$$

$$A = \pi\cdot r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$$

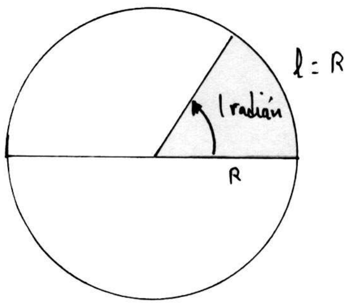
2º) *Cuadratura del círculo*





$l^2 = \pi r^2$ $\qquad l = r\cdot\sqrt{\pi}$

3º) *Radianes y estereorradianes*



El radián es una unidad de medida de ángulos. Un radián es el ángulo que abarca sobre la circunferencia un arco de longitud igual a su radio.

α = 1 radián

si, $l = R$

La equivalencia del radián en el sistema sexagesimal es inmediata, recordando que la circunferencia tiene 360º y abarca un arco de valor $2\cdot\pi\cdot R$

$$\begin{array}{ccc} 360^{a} & \text{———} & 2\cdot\pi\cdot R \\ \alpha & \text{———} & R \end{array} \qquad \alpha = \frac{180^{o}}{\pi} = 57^{o}17'44{,}8''$$

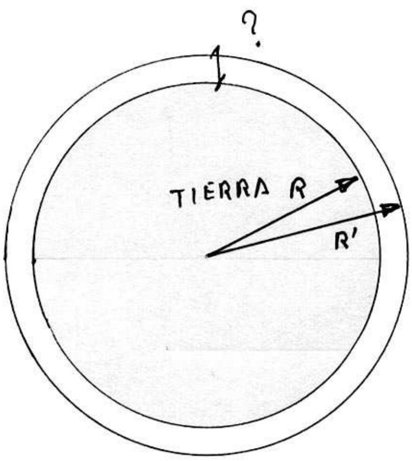
Para pasar de grados a radianes; multiplicamos por π y dividimos por 180º.

Para pasar de radianes a grados multiplicamos por 180º y dividimos por π

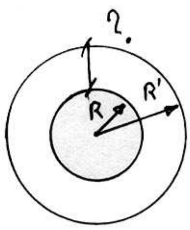
De igual forma definimos el estereorradián como el ángulo sólido que abarca sobre una superficie esférica un área de R^2.

En las fórmulas de la Física los ángulos se miden siempre en radianes y el número π aparece como un factor de conversión.

4º) *El cordón que ciñe a la Tierra*



Imaginemos un cordel inelástico que circunscribe exactamente a la Tierra (unos 40.000.000 metros) y añadamos a ese cordel 1 metro. Ahora volvamos a situar ese cordón rodeando a la Tierra, manteniendo el mismo centro, con lo cual existirá cierta holgura entre el cordón y la superficie de la Tierra; ¿cuál es el valor de dicha holgura?; es decir, ¿qué distancia hay entre el cordón y la Tierra?.



Segunda cuestión: Tomemos un hilo y rodeemos exactamente una bola de billar. Añadimos un metro a esa longitud y volvamos a circunscribir a la bola. ¿Qué distancia separa el hilo de la bola de billar?.

Sorprendentemente las distancias en ambos casos son iguales a $\frac{1}{2\cdot\pi}$ metros, aproximadamente 16 cm de holgura, pues la respuesta es totalmente independiente del radio del círculo. No importa que rodeemos todo el Universo o bien un protón. La deducción es fácil de justificar.

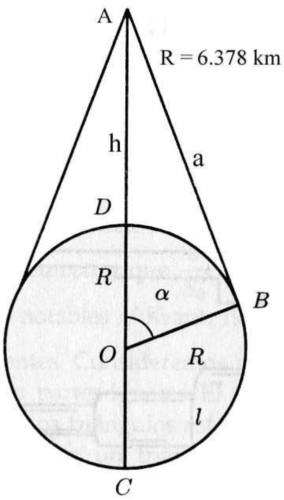
$$L_1 = 2\cdot\pi\cdot R$$

$$L_2 = 2\cdot\pi\cdot R + 1$$

$$R' = \frac{2\cdot\pi\cdot R + 1}{2\cdot\pi} = R + \frac{1}{2\cdot\pi}$$

$$R' - R = \frac{1}{2\cdot\pi} = 15{,}9 \text{ cm}$$

4º bis) *Cuando el cordón se ajusta al contorno de la Tierra*



Existe una variación del problema anterior, cuando añadimos 1 m al cordón que ciñe la Tierra y, tirando del punto A hacia arriba, lo ajustamos exactamente al contorno de la Tierra.

La pregunta es, ¿qué altura **h** se eleva el punto A sobre la superficie de la Tierra?. Suponemos una Tierra perfectamente esférica de R_{Tierra} = 6.378 km

Del enunciado del problema se deduce que $a + l = \dfrac{2\pi R + 1}{2}$, de donde

$$\frac{l}{R} = \pi + \frac{1}{2R} - \frac{a}{R}. \qquad (*)$$

Además, $\dfrac{l}{R} = \pi - \alpha$, por lo cual

$$\operatorname{tg}\frac{l}{R} = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{R}.$$

Teniendo en cuenta (*), de aquí obtenemos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{a}{R}.$$

Tomando los primeros términos del desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{tg} x$, resulta

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}.$$

Escribamos la última relación de la forma siguiente:

$$\frac{a}{R} - \frac{1}{2R} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{R} - \frac{1}{2R}\right)^3 \approx \frac{a}{R}, \quad \text{ó bien} \quad \left(\frac{a}{R} - \frac{1}{2R}\right)^3 \approx \frac{3}{2R}.$$

Despreciando los sumandos pequeños, de esto se obtiene

$$\frac{a}{R} \approx \sqrt[3]{\frac{3}{2R}}. \qquad (**)$$

Según el teorema de Pitágoras, la hipotenusa OA del triángulo rectángulo OAB es

$$OA = R\left[1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Limitándonos a los primeros términos del desarrollo de Taylor de la función $(1+x)^p$, $(1+x)^p \approx 1 + px$, la última expresión adopta la forma

$$OA \approx R\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^2\right].$$

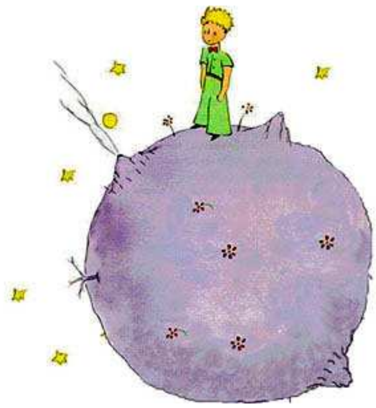
Teniendo en cuenta (**), de aquí se deduce que

$$OA \approx R + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}R}.$$

Así pues, la altura hasta la cual se levanta la cuerda desde la superficie de la Tierra, es aproximadamente

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{4}R} \approx 120 \text{ m}.$$

5º) *La historia del principito*

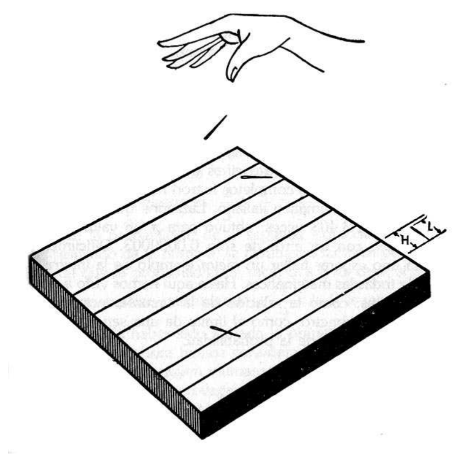


a) En el cuento de Antoine de Saint Exupery, el Principito habita un pequeño asteroide de apenas 1.000 m de circunferencia. Cuando el Principito da la vuelta completa al asteroide, sus pies han recorrido una cierta longitud y su cabeza ha recorrido una circunferencia ligeramente superior.

Si el principito mide 1 m de altura, ¿cuál es la diferencia entre los caminos recorridos por su cabeza y por sus pies respectivamente?.

b) Si ahora el Principito se trasladara a la Tierra, cuya circunferencia es de 40.000.000 de metros, e hiciera el recorrido completo por un meridiano terrestre, ¿cuál sería la diferencia entre los caminos recorridos por sus pies y por su cabeza?.

6º) *Las agujas de Buffon*



Lanzando agujas obtenemos π. Un naturalista del siglo XVIII, el conde Buffon popularizó el llamado método de la aguja para obtener π. Sea una superficie plana dividida en líneas paralelas separadas una distancia constante H. Tomamos agujas de longitud = H y las dejamos caer al azar sobre esa superficie; consideramos caídas favorables cuando la aguja toca alguna de las rayas horizontales y caídas desfavorables cuando la aguja no toca a ninguna de las rayas. Buffon justificó que, dividiendo los casos favorables entre el total de lanzamientos se obtenía el valor $\frac{2}{\pi}$.

En el año 1.901 el matemático italiano Lazzerini dejando caer la aguja 3.408 veces obtuvo para π el valor; 3,1415929 con un error de sólo 0,0000003.

7º) *La insospechada relación entre π y g.*

En el siglo XVII Christian Huygens (1629-1695) estableció la fórmula del período T de las oscilaciones pequeñas del péndulo matemático (un punto material pendiente de un hilo imponderable e inextensible de longitud 1).

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Donde g es la aceleración de la gravedad.

Huygens no sólo obtuvo esta fórmula, sino que también propuso utilizarla para definir el patrón de la unidad de longitud. Huygens sugirió tomar la longitud **l** del hilo del péndulo matemático que realiza una oscilación exactamente en dos segundos como unidad de longitud. La comodidad de este método es evidente: en cualquier instante podemos improvisar un péndulo colgando de un hilo un cuerpo masivo pequeño. De este modo, el instrumento para la elaboración de dicho patrón siempre estará a la mano.

Si la propuesta de Huygens de la elección de la unidad de longitud hubiera sido aceptada, entonces para una longitud 1 = 1 y un período T = 2 seg, tendríamos, como se deduce de su fórmula, $\pi^2 = g$, ¡una identidad!.

Pero por desgracia para los amantes de lo inesperado, y por suerte para los demás habitantes de la Tierra, nuestro planeta natal no es una bola ideal. Además de ser achatada en los polos, está repujada con montañas altas y océanos profundos. Como resultado, **g** no es una constante, depende tanto de la latitud geográfica como de las heterogeneidades de las capas de la corteza terrestre. De este modo, en lugar de la igualdad exacta $\pi^2 = g$, en las extensiones de nuestro planeta se cumple apenas la aproximación $\pi^2 \cong g$.

Curiosamente, después de la Revolución de 1.789, la joven República Francesa revisó el sistema de medidas. Dos comisiones, dirigidas por J. L. Lagrange (1736-1813) y P. S. Laplace (1749-1827), analizaron el proyecto de reforma del sistema de medidas. Este proyecto contenía la siguiente propuesta del obispo Talleyrand (1.754-1.838), más tarde famoso diplomático: elegir como unidad de longitud la longitud de un péndulo con período de oscilaciones T = 2 segundos en la latitud 45°.

Por su parte, Laplace insistía en que las medidas de la Tierra, calculadas partiendo del patrón de longitud aceptado, fueran múltiplos de potencias de diez. Como resultado de un compromiso, se decidió aceptar como unidad de longitud la 1/10.000.000 parte de un cuarto del meridiano de París, el cual se diferencia sólo en 0,6 % del valor de la unidad de longitud de Talleyrand-Huygens.

Este patrón se mantuvo por un tiempo bastante prolongado, y sólo en 1.960 fue reemplazado por otro más perfecto, relacionado con las propiedades ondulares de la luz. Sin embargo, estas innovaciones no han influido de modo alguno en la aproximación $\pi^2 \cong g$.

8º) *Función Gama de Euler (Γ).*

La función $\Gamma(x)$ generaliza el concepto de factorial. Si x no es un número entero.

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma(x-1) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi\cdot x)} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\cdot e^{-x}\cdot dx$$

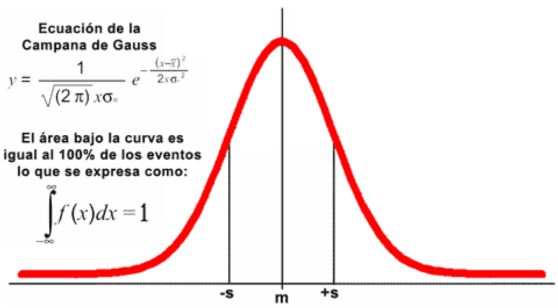
$$\Gamma(n+1) = n\cdot\Gamma(n)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n = 1, 2, 3, 4, ...$$

9º) *Fórmula de Stirling*

$$n! \cong \sqrt{2\pi\cdot n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$$ para ***n*** muy grande

10º) *La campana de Gauss*



La campana de Gauss permite conocer la probabilidad de un cierto suceso en el caso de una población cuyo comportamiento estadístico siga un patrón normal, con media μ y varianza σ.

La ecuación de la curva viene dada por la expresión.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

Cuando la media de la distribución es $\mu = 0$ y la varianza $\sigma^2 = 1$, la expresión anterior se transforma en.

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

El área total encerrada por la curva y el eje de abscisas es 1.

La probabilidad, expresada en %, de que ocurra un cierto suceso *x* equivale al área encerrada por la curva y el eje de abscisas desde - ∞ a *x*.

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx$$

Obsérvese que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \sqrt{2 \cdot \pi}$. Como se puede apreciar, π está siempre presente.

11º) *El problema de la corona circular.*

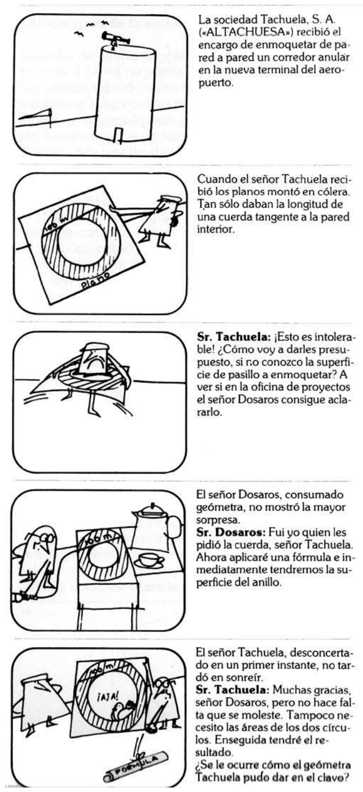
Siendo R, el radio de la circunferencia grande y r el radio de la circunferencia pequeña, aplicando Pitágoras.

$$R^2 - r^2 = 50^2$$

El área de la corona circular es.

$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

$A = \pi \cdot 50^2 = 7.853{,}98 \text{ m}^2$



12º) *Relación entre π y φ*

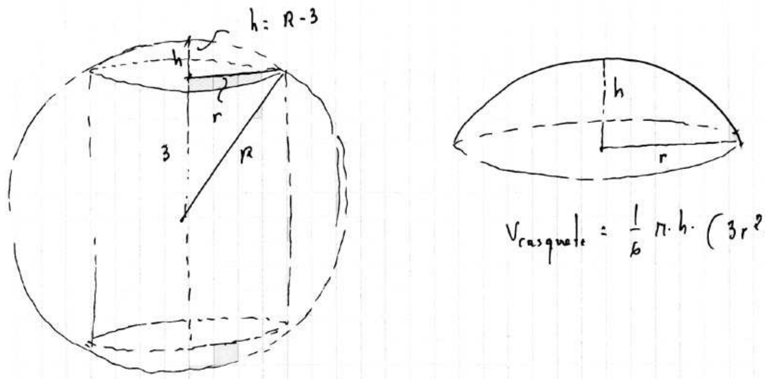
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi}{2}$$

13º) *El problema de la esfera perforada*

Dada una esfera maciza de radio R, desconocido, efectuamos un agujero con un taladro a lo largo de uno de sus diámetros. El diámetro de la broca es desconocido también = 2·r.

La altura de la perforación es de 12 cm.

Con estos datos, se pide hallar el volumen de la parte sólida de la esfera que queda después de perforarla.



$$V_{casquete} = \frac{1}{6}\pi \cdot h \cdot (3r^2 + h^2)$$

$$V_{sólido} = V_{esfera} - 2 \cdot V_{casquete} - V_{cilindro}$$

$$* \quad V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot 6 \qquad r^2 = R^2 - 9 \quad (\text{Pitágoras})$$

$$* \quad V_{cilindro} = 6\pi \cdot (R^2 - 9)$$

$$2 \cdot V_{casquete} = 2 \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot (R-3) \cdot \left[3(R^2-9) + (R-3)^3\right]$$

$$2 \cdot V_{casq} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left[3(R-3)(R^2-9) + (R-3)^3\right]$$

$$2 \cdot V_{casq} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left[3R^3 - 27R - 9R^2 + 81 + R^3 - 9R^2 + 27R - 27\right]$$

$$* \quad 2 \cdot V_{casq} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left[4R^3 - 18R^2 + 54\right]$$

$$V_{sólido} = \cancel{\frac{4}{3}\pi R^3} - \cancel{6\pi R^2} + 54\pi - \cancel{\frac{4}{3}\pi R^3} + \cancel{6\pi R^2} - 18\pi = \underline{36\pi}$$

$$\underline{\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3}$$

14ª) *Las paradojas con el número π*

El concepto de límite, está lleno de trampas sutiles.

a) *«En cualquier triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a la suma de los catetos»*

Supongamos que en el triángulo ABC los puntos D, E, F son los puntos medios de los lados (fig. 1.5). Por la propiedad de la líneas medias del triángulo, tenemos que DF = $\frac{1}{2}$BC y EF = $\frac{1}{2}$AB, así que la longitud de la quebrada ADFEC es igual a la suma de las A longitudes de los lados AB y BC. Si tomamos ahora los puntos medios G, H, I, J de los lados de los dos nuevos triángulos ADF y FEC, de la D misma forma se puede demostrar que la longitud de la quebrada AGKHFILJC es igual a la longitud de la quebrada ADFEC y, consecuentemente, es igual a la suma de las longitudes de los lados AB y BC.

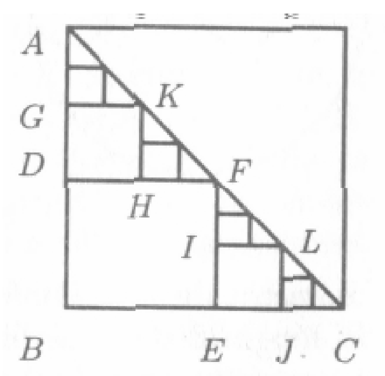


Fig. 1.5

Este procedimiento de partición de la quebrada puede continuar tanto como se quiera, y en cada paso la longitud de todas las quebradas obtenidas será igual a AB + BC. Las longitudes de los segmentos que conforman las quebradas, disminuyen constantemente y sus extremos se pegan cada vez más a la base AC, y, en límite, el perímetro de las quebradas se confunde con el segmento AC. Consiguientemente, AB + BC = AC.

b) *«En toda circunferencia su diámetro es igual a la mitad de la longitud de la circunferencia.»*

En la figura 1.6 se muestra el símbolo de la filosofía china antigua «Yin y Yang», el cual plasma la unidad de dos principios antagónicos: el día y la noche, lo femenino y lo masculino, el bien y el mal. El contorno del arco interior de este símbolo está formado por dos semicircunferencias cuyos radios son dos veces menores que el radio del círculo grande, los centros de las cuales, junto con el centro del círculo grande, están dispuestos sobre un diámetro al que dividen en cuatro partes iguales (fig. 1.7).

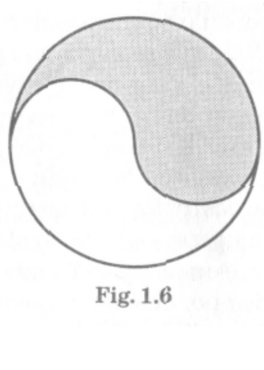


Fig. 1.6

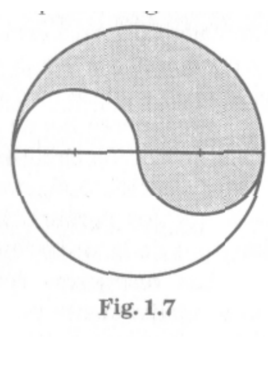


Fig. 1.7

No es difícil calcular que la longitud de este arco con «forma de zigzag» en el interior del círculo es igual a la mitad de la longitud de la circunferencia grande. A continuación podemos realizar un proceso infinito de transformación de este arco, análogo a la partición de los lados del triángulo en el sofisma anterior.

En la figura 1.8 se ilustran los dos pasos siguientes de este procedimiento. La suma de las longitudes de las partes que constituyen el nuevo arco con «forma de zigzag» sigue siendo igual a la mitad de la longitud de la circunferencia grande.

Si continuamos este proceso indefinidamente, al fin y al cabo la curva con «forma de zigzag» se confundirá con el diámetro de la circunferencia grande y, en resumen, «obtendremos» que la longitud de la semicircunferencia es igual a su diámetro (de donde, a propósito, se deduce el resultado paradójico $\pi = 2$).

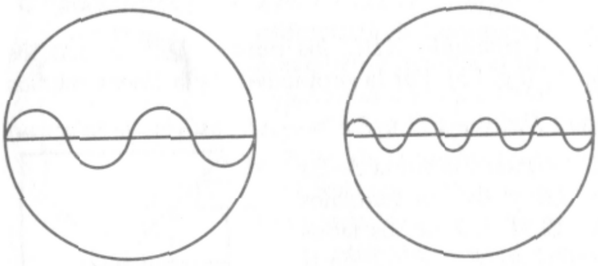


Fig. 1.8