

Unidad didáctica: **INTERACCIÓN GRAVITATORIA (2º Bachillerato de Tecnología)**1.- Antecedentes históricos

Las fuerzas gravitatorias son las primeras con las que contacta el ser humano desde su nacimiento. Cuando un niño tropieza, cae al suelo, si suelta un juguete, éste se dirige indefectiblemente hacia el suelo. Todos los actos cotidianos tienen en cuenta la existencia de las fuerzas gravitatorias. Al arrojar una lanza, ésta vuelve al suelo después de un breve vuelo.

Aristóteles interpretaba la gravedad diciendo que cada elemento tiende a volver a su "lugar natural". Así, una piedra lanzada hacia arriba tiende a caer para unirse con lo semejante, la tierra. Este fenómeno sólo podría tener lugar en el mundo sublunar, la zona de los cambios, sometido a la corrupción. Fuera de ella no son aplicables estos fenómenos. Los cuerpos del mundo celeste cuyo único componente es el éter incorruptible están sometidos a un movimiento uniforme y circular con la Tierra como centro.

Esta idea cuestionada por los astrónomos posteriores condujo al sistema de cicloides de Ptolomeo, a fin de explicar los movimientos retrógrados de los planetas. En el mundo sublunar podía existir el movimiento rectilíneo descendente; piedra que cae, ascendente; humo que asciende hacia las nubes, como únicos movimientos naturales. Cualquier otro movimiento, por ejemplo; el lanzamiento de una flecha, eran movimientos forzados, no naturales, que precisaban de una "violencia" exterior a ellos.

Así pues, Aristóteles admitía la inercia del reposo pero no la inercia del movimiento. Otro error de Aristóteles, incuestionado hasta el siglo XVII es la correspondencia entre peso y aceleración gravitatoria. Los cuerpos más pesados caen más rápidamente que los ligeros pues manifiestan más ansiedad por lograr su posición natural.

En el siglo IV a.C. Aristarco de Samos propugnó la teoría de un Sol inmóvil y en torno a él, la Tierra y los otros 5 planetas conocidos; Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno girando en órbitas circulares cuyo centro es el mismo Sol, al mismo tiempo, centro de la esfera de las estrellas fijas. Esta teoría provocó respuestas airadas, acusaciones de impiedad, tal y como volvería a suceder 20 siglos más tarde, pues ponía en tela de juicio el carácter divino reconocido a la esfera celeste. Además, al desconocerse los fundamentos de la gravedad se pensaba en términos de densidades y la Tierra, el objeto más pesado, debía estar en el centro y el resto de los astros que son de fuego puro orbitarían en torno a ella.

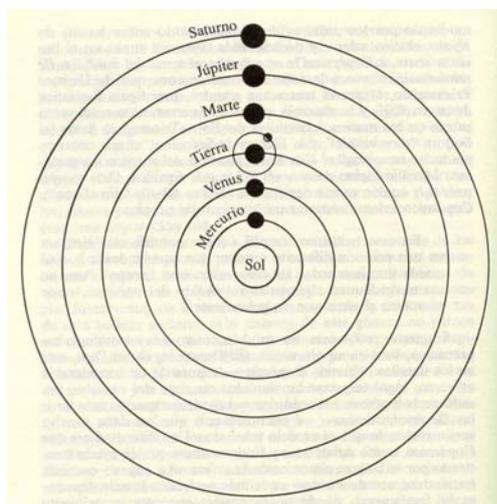
La cosmología aristotélica dominará toda la Edad Media añadiéndose nuevas cicloides para así explicar los movimientos, cada vez investigados con mayor precisión, de los astrónomos medievales.

El renacimiento marca el comienzo de la liberación de las tesis aristotélicas. Nicolás de Cusa suprime la bipartición entre el mundo sublunar y la región celeste. El universo es uno, diversificado y semejante a sí mismo. La Tierra ya no es la cloaca del universo sino una “estrella noble” que posee, además, un movimiento. Nicolás de Cusa (1.401 – 1.464) niega la existencia de direcciones y de lugares privilegiados en el espacio; “arriba” y “abajo” dejan de tener significación objetiva. Un observador, cualquiera que fuera el lugar en que se colocase vería que el universo gira en torno a él y creería que él ocupaba su centro. Esta destrucción del cosmos medieval era la condición previa para la revolución que estaba por llegar.

Incluso Leonardo da Vinci (1.452 – 1.519) afirma “La Tierra no está en el centro del círculo del Sol ni en el centro del mundo... y para el que estuviera en la Luna igual le parecería nuestra Tierra, haciendo el mismo oficio que la Luna para nosotros”.

Las ideas de Descartes (1.596-1.650) sobre la gravitación eran muy singulares. La caída de una piedra se debía al efecto de succión del vórtice de materia que rodeaba a la Tierra. Del mismo modo, las órbitas circulares de los planetas se debían al efecto de succión de la materia vorticial que rodeaba al Sol. Huygens pensó haber demostrado la teoría de Descartes al comprobar como un remolino de agua arrastraba los guijarros hacia el centro del recipiente.

Copérnico, nacido en 1.473, se encuentra con un Cosmos que precisa de 77 esferas para describir los movimientos celestes y se atreve a dar el paso decisivo.



Propone un universo heliocéntrico con los planetas orbitando en torno a él en órbitas circulares con velocidades distintas. Un modelo sencillo que explica los movimientos retrógrados de los planetas, la diferencia considerable en el brillo de Marte, rescatando del olvido el modelo de Aristarco y manteniendo fija la esfera de las estrellas. Según Copérnico la gravedad no es sino la tendencia natural de las partes de un todo, separadas de ese todo, a volver a él. Las partes separadas, por ejemplo; una piedra no intenta acercarse al “centro del mundo” para descansar en él sino que se limitan simplemente a tender hacia su todo,

es decir; la Tierra. Lo mismo ocurriría con una piedra lunar que tendería a juntarse con el resto de materia de la Luna.

Cada cuerpo; la Tierra, el Sol, la Luna, etc. poseían según Copérnico su propio sistema de gravedad, de manera que una piedra en el espacio caería hacia el cuerpo celeste más próximo. Más aún, consideraba que un punto geométrico era el foco de la gravedad. Sin embargo, no pensaba que los cuerpos del sistema solar ejercieran un influjo unos sobre los otros.

La vieja objeción aristotélica en contra del movimiento de la Tierra según la cual debiera producirse un desplazamiento en el punto de caída de la piedra, las aves se retrasarían en su vuelo según les pasaba la Tierra por debajo o los grandes huracanes que azotarían perpetuamente la Tierra de oeste a este, es rebatida por Copérnico aduciendo que al tratarse de objetos terrestres; piedras, nubes, pájaros, participan del movimiento de la Tierra y son arrastrados por ella.

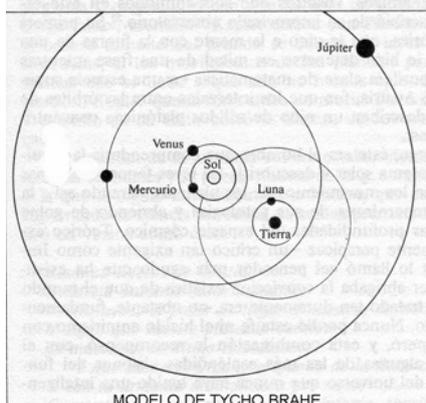
Copérnico creyó que la forma esférica era la forma suficiente para engendrar el movimiento más perfecto y natural; el movimiento circular. Éste es el único medio para que se perpetúen los movimientos celestes sin necesidad del móvil propuesto por Aristóteles.

El universo copernicano creó inmediatamente la lógica polémica entre defensores como Giordano Bruno y Galileo, y detractores, al chocar sus ideas contra la autoridad conjunta de Aristóteles y la revelación. La iglesia protestante reaccionó más pronto que la católica. Sin embargo, fue ésta quien se situó posteriormente en una posición de ataque más violenta, mientras las iglesias protestantes dejaron actuar a sus científicos con mayor libertad.

Giordano Bruno (1.548 – 1.600) fue más radical y con su teoría de un universo infinito, formado por innumerables soles y planetas como el nuestro propone una unidad de la naturaleza y una relatividad en los movimientos hizo estallar el Cosmos medieval, dejando la vía libre a Galileo, Descartes y Newton. Este acertado radicalismo le llevó a la hoguera en una Europa ensangrentada por las guerras de religión.

Galileo (1.564 – 1.642) realizó estudios sobre los movimientos de los graves, demostrando que el tiempo de caída es independiente del tamaño del cuerpo. Hizo sus estudios con planos inclinados e incluso soltando dos balas de cañón de distinto peso desde lo alto de la torre de Pisa comprobó que ambas tardan el mismo tiempo en caer.

Galileo profundizó en la idea de la inercia de los cuerpos cuando están en movimiento, poniendo el ejemplo de los pasajeros de un barco cuyos movimientos no se ven afectados por la velocidad del navío siempre y cuando ésta sea uniforme. De esta forma, se ponía fin a la objeción aristotélica del movimiento de rotación de la Tierra.



MODELO DE TYCHO BRAHE

Sus estudios sobre el péndulo le acercan otra vez a la comprensión del fenómeno gravitatorio pero sin llegar a desentrañar la causa a pesar de su preocupación sobre el tema; “...todos saben que la causa del peso de los cuerpos es la gravedad pero yo no te pregunto por el nombre sino por la esencia de las cosas. Excepto el nombre impuesto a la cosa y que se ha hecho familiar por el uso, no comprendemos nada de la cosa, ni de la virtud que hace bajar una piedra, ni de la que mueve la Luna en su órbita”.

La idea de esferas cristalinas sólidas donde estaban engastados los planetas hubo que desecharse cuando Tycho Brahe (1.546 – 1.601) siguió la órbita de un cometa demostrando que se movía a través del sistema solar cortando las supuestas capas cristalinas sólidas. Mas, este descubrimiento llevaba intrínseca una cuestión; ¿qué es lo que de hecho mueve los cuerpos celestes y mantiene su disposición regular?.

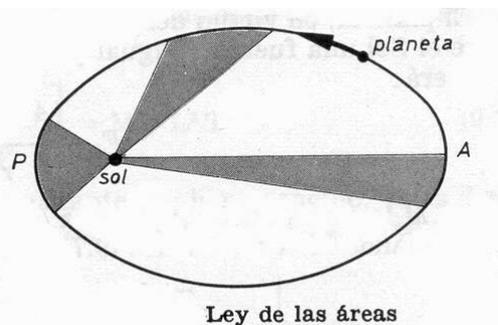
Gilbert de Colchester (1.544 – 1.603) sugería que el magnetismo era la causa que mantenía unido al sistema solar, idea compartida con Tycho Brahe y el mismo Kepler. Tycho Brahe, uno de los más brillantes astrónomos del siglo XVI, era el de los planetas orbitando en torno al Sol, al tiempo que el Sol, la Luna y la esfera de las estrellas giraban en torno a la Tierra.

Gilbert coincidía con el modelo de Tycho pero mantenía fija la esfera de las estrellas, siendo la Tierra quien giraba sobre su eje al igual que en el modelo copernicano.

2.- El sistema de Kepler. Leyes fundamentales

Kepler, nacido en 1.571 tuvo acceso a las tablas astronómicas de Tycho Brahe, las más precisas de la época y se planteó estudiar las anomalías que presentaba el modelo copernicano.

Su primer descubrimiento sitúa a cada uno de los planetas en un plano que pasa por el Sol, al contrario de Copérnico que los hacía pasar por el centro de giro de la órbita terrestre. La constancia de los planos orbitales planetarios sobre el plano de la eclíptica dirige el pensamiento de Kepler hacia el Sol como motor de los movimientos planetarios.



La idea errónea de Kepler sobre la gravitación supone que el Sol ejerce una “acción animadora” sobre la Tierra y el resto de los planetas tangencialmente a su trayectoria e inversamente proporcional a la distancia Sol-Tierra, al igual que la velocidad orbital del planeta. A partir de aquí enuncia la ley de las áreas: “Los radios vectores Sol-planeta barren áreas iguales en tiempos iguales”.

Kepler pensaba que el Sol envía efluvios magnéticos que rotaban como los radios de una rueda con el giro del Sol en el plano de rotación de los planetas. Estos efluvios propulsaban los planetas mediante una fuerza tangencial. Así, los planetas más externos se movían más lentamente que los que se hallaban en las proximidades del Sol debido a que los efluvios magnéticos se habían debilitado por la distancia.

Kepler pues, suscribía la vieja idea mecánica de la necesidad de la aplicación de una fuerza para mantener el movimiento. En esto Galileo aventajaba a su colega alemán.

Sobre la base de las observaciones astronómicas de Marte, finalmente abandona la aristotélica hipótesis del movimiento circular sustituyéndola por una elipse donde el Sol ocupa uno de sus focos. Esta curva es la única compatible con la ley de las áreas.

Posteriormente, en 1.618, enuncia la tercera ley; "La relación entre el cuadrado de los períodos y el cubo de la distancia de cada planeta al Sol es una constante". Dicha distancia es justamente el semieje mayor de la elipse.

En sus leyes, Kepler intuye la influencia del Sol en los movimientos de los planetas asignándole cierto efecto magnético al igual como un imán atrae una pieza de hierro, pero sin llegar a profundizar en esa idea.

3.- Teoría de la gravitación de Newton

Newton nacido en 1.642 conocía los trabajos de Kepler y su interpretación cinemática de los movimientos planetarios. Con estos datos se atrevió a dar un paso más. Por un lado elaboró una teoría sobre la "causa" del movimiento orbital y por otra generalizó los fenómenos gravitatorios a todo el Universo conocido.

Frente a las teorías de imanes situados en el Sol o los torbellinos de Descartes, Newton elabora una teoría de la acción a distancia, con la masa de los cuerpos como responsable de dicha acción. Además plantea la diferencia entre dos tipos de masas.

- a) La masa inercial culpable de la "pereza" de los cuerpos a cambiar su velocidad, y.
- b) La masa gravitatoria generadora de la acción a distancia atractiva entre dos cuerpos.

Newton postula la identidad entre los dos tipos de masas concepto que ha sido corroborado por las experiencias posteriores.

La historia de Newton y la manzana tiene visos de realidad y sus biógrafos así lo han confirmado. Su reflexión era; si la manzana cae al suelo y al mismo tiempo la Luna "cae" hacia la Tierra; ¿sus movimientos responden a una misma causa general?.

Newton elabora su teoría de la gravitación basándose en esa afirmación y su modelo matemático hace depender la fuerza de la inversa del cuadrado de la distancia y de la masa de la Tierra, en este caso, razonando de la siguiente forma.

La manzana cae del árbol con una velocidad de 4,9 m/seg en el primer segundo y la Luna describe una órbita aproximadamente circular de longitud R , siendo R la distancia Tierra-Luna. Como se conoce su período T de rotación que es de 27,3 días, entonces su velocidad es.

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Como la órbita es circular aparece una aceleración centrípeta sobre la Luna dirigida hacia la Tierra, de valor.

$$a_n = \frac{4 \pi^2}{T^2} R$$

La fuerza que provoca esa aceleración vale.

$$F = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} R$$

La tercera Ley de Kepler nos dice,

$$\frac{T^2}{R^3} = k$$

k es constante para cuerpos que orbitan en torno a una masa M determinada, pero varía en función de M .

$$T^2 = k \cdot R^3$$

Y sustituyendo.

$$F = m \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{k \cdot R^3} R$$

$$F = \frac{4 \cdot \pi^2}{k} \cdot \frac{m}{R^2}$$

Poniendo, $\frac{4 \pi^2}{k} = G \cdot M$, donde G es una constante, independiente de la masa M , queda.

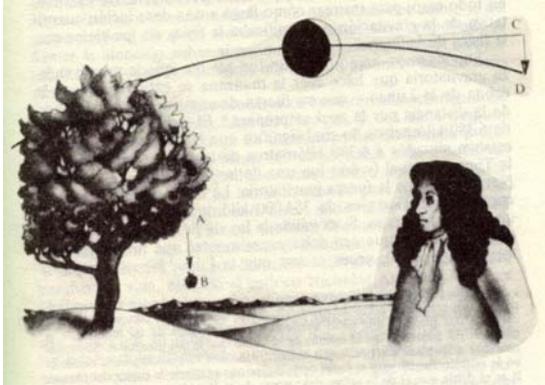
$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

En esta fórmula, expresión de la ley de la gravitación, debemos señalar los siguientes aspectos.

- Las fuerzas gravitatorias son siempre atractivas, no existen fuerzas gravitatorias de repulsión.
- Las fuerzas se producen a pares. La Luna atrae a la Tierra con la misma fuerza con que la Tierra atrae a la Luna.
- Los cuerpos se comportan como si toda su masa estuviera concentrada en su centro de gravedad, entonces R es la distancia entre los centros de las esferas planetarias.

El valor de la constante G que aparece en la fórmula de Newton es muy débil y eso explica por qué los fenómenos gravitatorios no son perceptibles entre masas pequeñas. Newton nunca llegó a conocer su valor y fue Cavendish, casi un siglo después, quien lo obtuvo experimentalmente.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nw.m}^2/\text{kg}^2$$



El descubrimiento del valor de G, constante de gravitación universal, permitió determinar la masa de la Tierra, del Sol y de todos los planetas con satélites.

Para comprobar la validez de su teoría de la gravitación Newton se fijó en el movimiento de la Luna, cuyo período de rotación es de 27,3 días y su

distancia media a la Tierra de 384.000 km.

La aceleración centrípeta de la Luna vale, pues, a partir de datos observables.

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} R = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 384 \cdot 10^6}{(27,3 \cdot 86400)^2} = 2,725 \cdot 10^{-3} = 2,725 \cdot 10^{-3} \text{ m/seg}^2$$

Y utilizando su teoría de la gravitación.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$$\text{Como } a = \frac{F}{m}$$

$$a = G \frac{M}{R^2}$$

Esta sería la aceleración teórica.

Como en esa fecha se ignoraba el valor de la constante G, se optó por dividir la g terrestre, cuyo valor ya había determinado Galileo, por la aceleración calculada a.

$$\frac{g}{a} = \frac{G \cdot \frac{M}{r^2}}{G \cdot \frac{M}{R^2}} = \frac{R^2}{r^2}$$

Siendo r el radio terrestre = 6.378 km y R la distancia media Luna-Tierra = 384.000 km

$$\frac{g}{a} = \frac{(384 \cdot 10^6)^2}{(6378 \cdot 10^3)^2} = 3624 \text{ (adimensional)}$$

Y el valor medido.

$$\frac{g}{a} = \frac{9,81}{2,725 \cdot 10^{-3}} = 3600$$

Estos dos valores prácticamente iguales prueban la verosimilitud de su teoría.

4.- Aplicaciones de la teoría de la gravitación

A partir de la expresión.

$$\frac{4 \pi^2}{k} = G \cdot M$$

Despejando k.

$$k = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

Y utilizando la tercera Ley de Kepler.

$$T^2 = \left(\frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \right) \cdot R^3$$

La expresión anterior, conjunción de la teoría gravitatoria de Newton y de la tercera Ley de Kepler nos permite, conocida G, hallar las masa planetarias. Así, la masa de la Tierra se obtiene a partir de.

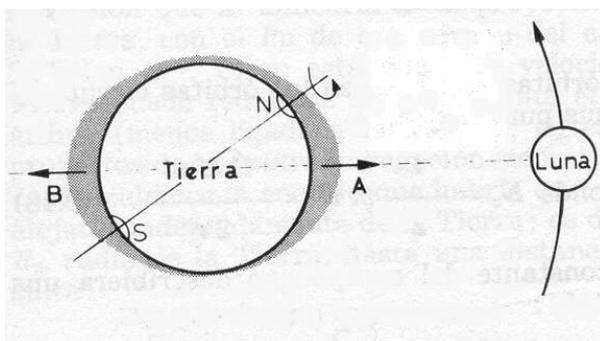
$$M = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{T^2 \cdot G}$$

T..... Período de revolución lunar

RDistancia Tierra Luna

De igual forma puede hallarse la masa del Sol, conociendo por ejemplo el período de revolución terrestre y la distancia Sol-Tierra.

Uno de los hallazgos más notables de la mecánica celeste, basada en la teoría de la gravitación de Newton fue el descubrimiento del planeta Neptuno realizado por Galle en el punto del cielo señalado por Leverrier y Adams, basados en las perturbaciones experimentadas en la trayectoria del planeta Urano.



Las mareas son oscilaciones periódicas del nivel de las aguas del mar. El agua carece de rigidez y así una molécula situada en el punto A será más atraída que el centro de la Tierra. En B la atracción de la Luna será menor que el centro de la Tierra. En B la atracción de la Luna será menor que en el centro de la Tierra y por tanto quedará retrasada respecto a éste, produciendo un aumento en la profundidad del océano. Se produce una

deformación elipsoidal de las masas de agua con los vértices diametralmente opuestos respecto de la Tierra y alineados con la Luna (pleamares) mientras que en el círculo máximo normal a esa línea se presentan las bajamares.

La posición del Sol influye en la fuerza de las mareas. Si la Luna, Tierra y Sol se sitúan en línea recta sus efectos se suman llamándose mareas vivas. Mientras que si la Luna está en cuadratura con el Sol, se contrarrestan parcialmente sus efectos y dan lugar a las mareas muertas.

También el magma fluido del interior de la Tierra experimenta variaciones periódicas debido a las mismas causas que las mareas. Son más probables los terremotos cuando tenemos luna llena o luna nueva.

La ionosfera es sensible a las posiciones relativas del Sol y de la Luna, alterando los efectos de los rayos cósmicos.

5.- Campo gravitatorio

Newton escribió; “Es inconcebible que la materia bruta inanimada, sin la mediación de algo más, que no sea material influya y afecte a otra materia sin contacto mutuo...Una gravedad...tal que cualquier cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia, a través del vacío, sin la mediación de algo más, a través de lo cual pueda conducirse la acción y la fuerza, es para mí un absurdo tan grande que no creo exista un hombre que con facultad de pensamiento sobre materias filosóficas pueda creer en ello”.

Fue Faraday quien introdujo el concepto de campo físico, como perturbación del espacio que rodea a la partícula creadora del campo. En el caso de un campo gravitatorio es la masa quien modifica el espacio a su alrededor, de forma que cualquier otra masa situada en la zona de influencia del campo se verá sometida a una fuerza de atracción cuyo valor viene determinado por la ley de Newton.

Llamando g a la intensidad de campo, su valor es.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$$F = m \cdot g$$

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

En el caso de la gravedad terrestre.

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

M Masa de la Tierra

R Radio terrestre

Al alejarnos de la Tierra, la gravedad disminuye.

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

r distancia al centro de la Tierra

$$r \geq R$$

Dividiendo.

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{r^2}$$

$$g = g_0 \frac{R^2}{r^2}$$

La gravedad varía a lo ancho de la esfera terrestre debido al achatamiento de los polos y al efecto de la rotación de la Tierra sobre su eje. En el ecuador la g es mínima y en los polos máxima.

$$g_{\text{Ecuador}} = 9,78 \text{ m/seg}^2$$

$$g_{\text{Polos}} = 9,832 \text{ m/seg}^2$$

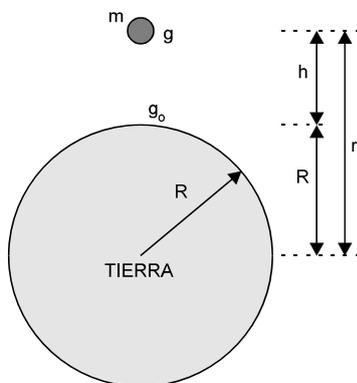
Las anomalías locales en los valores de g testimonian la existencia de yacimientos minerales que o bien tienen una densidad muy grande (menas de metales) o una densidad muy pequeña (bolsas de petróleo, acuíferos).

6.- Energía potencial gravitatoria

La formulación de la energía potencial gravitatoria estudiada en otros cursos nos decía que.

$$E_p = m \cdot g_0 \cdot h$$

Tomando como origen de energía potencial el nivel del mar y siendo h la altura sobre este nivel y g_0 la gravedad superficial. Sin embargo conforme va creciendo h , el valor de g disminuye con el cuadrado de la altura alcanzando un límite por encima del cual por más que aumentemos la altura la energía potencial en vez de aumentar, disminuye. Así pues, la E_p nunca se hace mayor que un determinado valor.



Calculemos pues, la expresión general de la energía potencial gravitatoria.

Para ello debemos obtener el trabajo necesario para levantar un objeto de masa m , desde la superficie terrestre hasta una distancia r del centro de la tierra, mediante una fuerza igual y contraria a su peso; cuyo valor es.

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$$W = \int_R^r \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} dr = \left[-\frac{G \cdot M \cdot m}{r} \right]_R^r = G \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

Este trabajo es igual al incremento de la energía potencial.

$$W = U(r) - U(0)$$

$$U(r) = U(0) + G \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

La constante $U(0)$ es arbitraria. Si tomamos como cero la energía potencial cuando la masa se encuentra sobre la superficie terrestre ($r = R$),

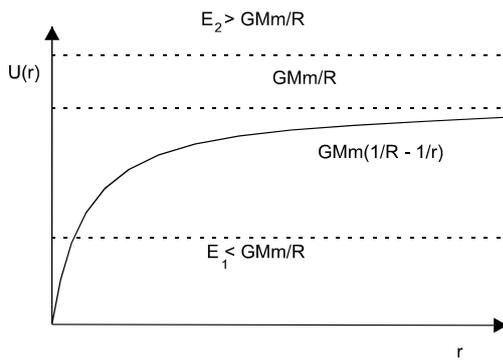
$$U(r) = G \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

O bien.

$$U(r) = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} \left[1 - \frac{R}{r} \right]$$

Como $r - R = h$ (altura sobre el nivel del mar)

$$U(r) = \frac{G \cdot M \cdot m}{R \cdot r} h = m \left(\frac{G \cdot M}{R^2} \right) h \frac{R}{r} = m \cdot g_0 \cdot h \left(\frac{R}{r} \right)$$



La energía potencial es $m \cdot g_0 \cdot h$ veces la relación $\frac{R}{r}$

Para $r \rightarrow \infty$ $U(r) = \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$

Para $E < \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$ la partícula se encuentra confinada en la región comprendida entre R y r y no puede abandonar la Tierra.

Si le comunicamos a un objeto de masa m una energía mayor o igual a la barrera de potencial de valor $\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$, éste abandonará la Tierra.

La velocidad mínima necesaria para romper la barrera de potencial se llama velocidad de escape, cuyo valor es.

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = G \frac{M \cdot m}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

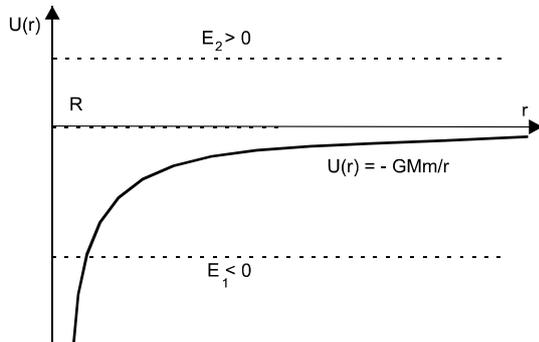
O bien, como $g_0 = G \frac{M}{R^2}$; $G \cdot M = g_0 \cdot R^2$

$$v = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$$

Desde un punto próximo a la superficie de la Tierra.

$$v_{\text{escape}} = 11,2 \text{ km/seg}$$

Este valor disminuye al ir aumentando la altura de lanzamiento.



Cuando tratamos de cuerpos celestes es conveniente cambiar nuestro origen de energía potencial. Elegimos como energía potencial nula la correspondiente a una separación infinita.

$$U(r) = U(0) + G \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

$$\text{Si } U(\infty) = 0$$

$$U(0) = - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

$$U(r) = - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

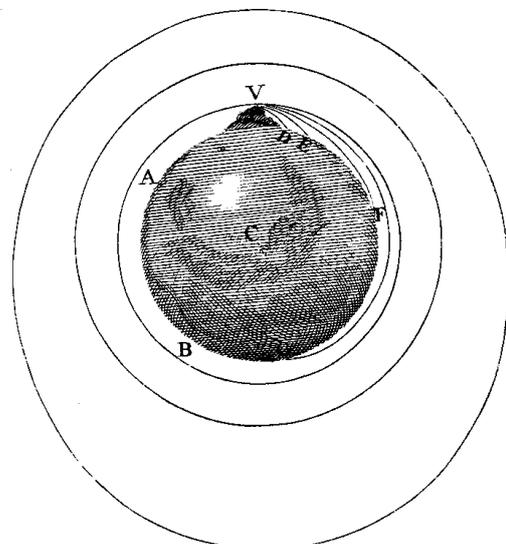
Sobre la superficie de la Tierra; $U = \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$, incrementándose según aumenta r y haciéndose cero cuando $r \rightarrow \infty$.

Cuando la energía $E < 0$, el cuerpo está ligada a la Tierra.

Si la energía $E > 0$, entonces el cuerpo abandona la Tierra.

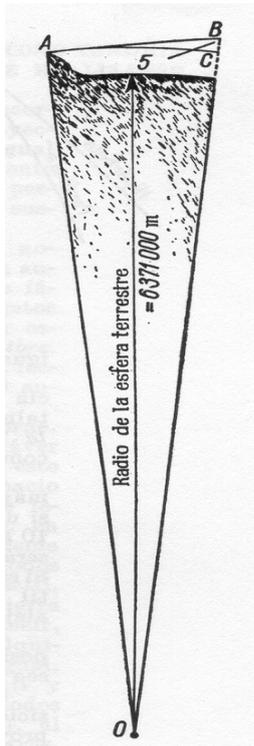
7.- Satélites artificiales

El problema de situar un cuerpo en órbita alrededor de la Tierra ya fue estudiado por Newton según se observa en el dibujo adjunto. Si deseamos una órbita circular entonces tendremos que comunicarle al objeto una velocidad tangencial (perpendicular al radio), tal que se compense la caída gravitacional con el avance recto. De forma que mantenga siempre la misma distancia sobre la superficie terrestre.



Sabemos que un cuerpo cae 4,9 metros cada segundo. Debemos lanzar pues, con una velocidad

tal que en 1 segundo el cuerpo siga estando a R metros del centro de la Tierra.



La distancia AB debe ser.

$$AB^2 = (R + 4,9)^2 - R^2 \quad R = 6.378 \text{ km}$$

$$AB^2 = 9,8 \cdot R + 4,9^2$$

$$AB = 7.906 \text{ m}$$

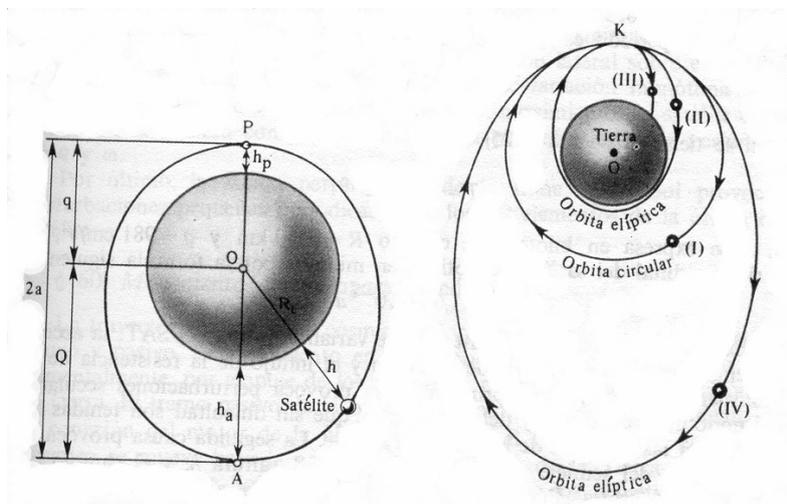
$$v = 7,9 \text{ km/seg}$$

A esta velocidad la llamaremos velocidad circular.

Esta velocidad disminuye, aunque muy poco al aumentar la altura R de lanzamiento.

La órbita descrita por el satélite dependerá pues, de la velocidad de lanzamiento.

- Cuando $v < v_{\text{circular}}$ el cuerpo describe una órbita elíptica de foco lejano el centro de gravedad de la Tierra (punto de lanzamiento en el apogeo), que corta a la superficie terrestre y por tanto después de un breve vuelo vuelve a caer a la Tierra.

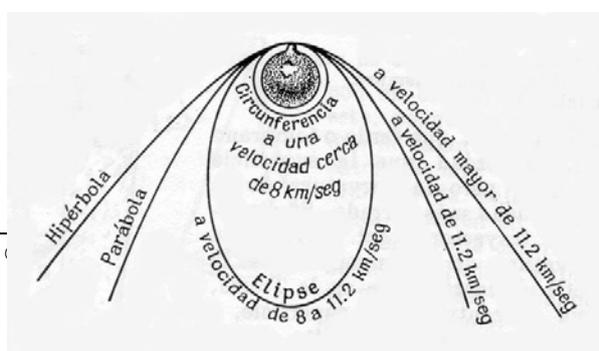


centro de gravedad de la Tierra.

- Si $v = v_{\text{circular}}$ la órbita es circular y concéntrica con la Tierra.

- Si $v > v_{\text{circular}}$ y $v < v_{\text{escape}}$ el satélite describe una elipse de foco próximo (punto de lanzamiento en el perigeo) en el

- Cuando $v = v_{\text{escape}}$ el satélite describe una parábola cuyas dos ramas se alejan hacia el infinito, aumentando paulatinamente la velocidad del satélite mientras se va alejando.



- Para $v > v_{\text{escape}}$ el satélite describe una órbita hiperbólica y su

velocidad mantiene un valor constante mientras se aleja.

En concreto, para situar un satélite en órbita en torno a la Tierra necesitamos, en primer lugar, elevar la altura de lanzamiento hasta alcanzar el punto de su trayectoria (elipse) más próximo a la Tierra (perigeo) y una vez situado en dicho punto comunicarle una velocidad, perpendicular a R, de valor menor que la velocidad de escape (11,2 km/seg) y mayor que la velocidad circular (7,9 km/seg), aproximadamente de unos 8 km/seg.

La energía total consumida es suma de la necesaria en cada fase.

1º) Energía hasta alcanzar el perigeo.

$$W = \int_R^r m \cdot g_0 \cdot dr = \int_R^r m \cdot g_0 \cdot \frac{R^2}{r^2} dr = m \cdot g_0 \cdot R^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_R^r = m \cdot g_0 \cdot R^2 \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

R Radio de la Tierra
r Distancia hasta el perigeo

2º) Para mantener el satélite en órbita su velocidad debe ser tal que.

$$F = m \cdot a$$

a aceleración centrípeta

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g_0 \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

$$v^2 = g_0 \cdot \frac{R^2}{r}$$

Por tanto, su energía cinética vale.

$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot g_0 \cdot \frac{R^2}{r}$$

Y la energía total será la suma de ambas.

$$E_{TOTAL} = m \cdot g_0 \cdot R \left[1 - \frac{R}{r} \right] + m \cdot g_0 \cdot R \cdot \frac{R}{2 \cdot r} = m \cdot g_0 \cdot R \left[1 - \frac{R}{2 \cdot r} \right]$$

Esta energía puede disminuirse en parte si se tiene en cuenta la velocidad de rotación de la Tierra (0,465 km/seg en el ecuador), en el sentido este-oeste. Por esa razón los lanzamientos se hacen siempre hacia el este y en latitudes lo más próximas posible al ecuador.

El período de rotación del satélite vale.

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{R \cdot \sqrt{\frac{g_0}{r}}} = \frac{2 \cdot \pi}{R \cdot \sqrt{g_0}} r^{\frac{3}{2}}$$

Todo este proceso explica por qué el lanzamiento de satélites requiere el empleo de cohetes de varias etapas con objeto de que vayan actuando sucesivamente hasta que el último impulso actúe solamente sobre una pequeña parte del proyectil.

8.- Implicaciones culturales y sociales de la teoría de la gravitación

El desarrollo de la teoría de la gravitación newtoniana permitió conocer mejor el mundo en que vivimos y el movimiento y posición de los cuerpos en el Sistema Solar, regidos por las mismas leyes que los cuerpos terrestres.

La confirmación de la teoría heliocéntrica propuesta por Copérnico supuso un cambio de la visión del hombre sobre su entorno, sobre el significado de su existencia y sobre su relación con la divinidad. El hombre, la raza humana dejó de ser el centro de la creación, ya no somos una especie mirada por el Creador sino habitantes de un planeta que órbita en torno a una estrella de tamaño medio perteneciente a una galaxia que puebla un Cosmos casi infinito.

Perder la consideración de seres privilegiados de todo el Universo necesitaba tiempo para ser digerido y la iglesia sólo pidió perdón por el trato infligido a los defensores del sistema heliocéntrico bajo el papado de Juan Pablo II.

Las personas, en general, están familiarizados con los fenómenos gravitatorios a nivel terrestre pero no así con los que tienen lugar fuera de nosotros; por ello siempre es motivo de conmoción la aparición de un cometa como el que el verano pasado pudo ser visible a simple vista sobre la Tierra o el Shoemaker que chocó contra Júpiter, poniéndonos en alerta sobre una situación que pudiera volver a repetirse como lo ha hecho en el pasado; la caída de un cometa o un meteorito sobre la Tierra. En definitiva no somos más que una nave vagando por el espacio regidos por la inexorable ley de la gravitación cuyos efectos bien podrían destruirnos.

El descubrimiento de nuevos planetas a partir de las perturbaciones que producen en sus órbitas los planetas ya conocidos (descubrimiento de Neptuno) así como el descubrimiento de Plutón en 1.930 por Tombaugh son clarísimas demostraciones de la validez de dicha teoría y una herramienta en manos de la mente humana para predecir efectos sin achacarlo a intervenciones divinas, aunque siempre quedará la pregunta del origen de la gravedad.

En 1.784 Hershell mostró que las estrellas observables constituían un sistema con forma de lente, es decir, galaxias.

El mismo Hershell observó en 1.803 que algunas parejas de estrellas próximas giran una alrededor de la otra (estrellas binarias) según la ley de la gravitación. También se observó que las estrellas tienden a agruparse por efectos de la gravitación formando cúmulos globulares y abiertos.

Desde que en 1.923 Hubble mostró la existencia de otras galaxias, se ha observado que éstas se agrupan en cúmulos y supercúmulos galácticos todas siguiendo la inexorable ley de la gravitación.

El tema más candente hoy en día en los foros astronómicos tienen también como protagonista a la gravedad; la actual expansión del Universo consecuencia del "bing-bang" ¿continuará indefinidamente o bien las fuerzas de gravedad frenarán su actual expansión y comenzará a juntarse, a contraerse, en lo que se denomina el "big-crunch". Todo depende de la cantidad de materia del universo y con la que hemos descubierto hasta la fecha es insuficiente para provocar una contracción gravitatoria aunque la posible existencia de materia oscura puede hacer cambiar la teoría de signo. En esa polémica andan hoy enfrascados los astrónomos.

Uno de los efectos más sorprendentes y consecuentemente más populares de la teoría de la gravedad es la existencia de agujeros negros, esto es estrellas cuya materia es tan sumamente densa que crea un campo gravitatorio tan fuerte que no puede escapar nada de allí, ni siquiera la luz. Es un concepto teórico pero corroborado con observaciones astronómicas cuya justificación bien pudiera corresponder a esa teoría.

Se trata de un efecto más de una larga historia sobre el saber humano y su innegable capacidad de curiosidad, una historia que comenzábamos con Aristóteles y cuyo final sigue abierto para terreno de juego de los investigadores.