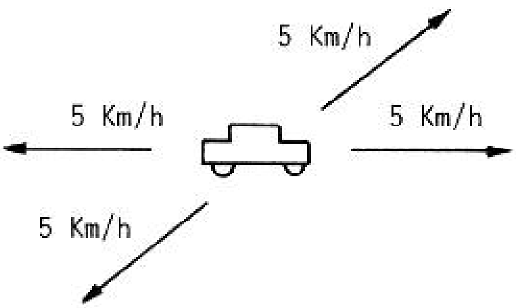
TEMA 2

MAGNITUDES VECTORIALES. OPERACIONES CON VECTORES

1. DIFERENCIA ENTRE MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Al medir el valor de una magnitud obtenemos una cantidad numérica seguida de la unidad correspondiente. Por ejemplo, decimos; "la velocidad de ese vehículo es de 5 Km/h". Sin embargo, con esta única información no precisamos lo que le sucede al móvil pues podría desplazarse hacia el norte, hacia el sur, ascender una montaña,...etc. En cualquiera de estos casos, la velocidad seguirá siendo de 5 Km/h pero es evidente que la posición del móvil al cabo de un cierto tiempo dependerá de la dirección elegida.



Nos encontramos ante una magnitud, la velocidad, de la que necesitamos conocer, no sólo su valor numérico, 5 Km/h, sino también la dirección y sentido en la que actúa para tener una información completa, sin indeterminaciones, de sus efectos.

Este tipo de magnitudes reciben el nombre de VECTORIALES y para diferenciarlas suelen representarse con una flechita encima de la letra que simboliza la magnitud; $\vec{v}$.

OBSERVACION: En los siguientes temas no aplicaremos rigurosamente este criterio para diferenciar las magnitudes vectoriales, dado el carácter elemental de esta obra.

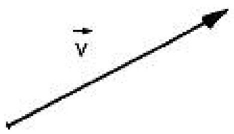
Existen, sin embargo, otras magnitudes en las que basta con conocer su valor numérico para quedar completamente determinadas, sin necesidad de añadir ningún otro dato. A estas magnitudes se les conoce con el nombre de ESCALARES. Por ejemplo; si decimos que la masa de un cuerpo es de 15 Kg, nos basta con ese dato pues la masa es independiente de su orientación en el espacio.

Todas las magnitudes de la Física se clasifican en dos grandes grupos: ESCALARES y VECTORIALES. En la tabla siguiente se recogen algunas de las más usuales.

MAGNITUDES		TIPO
Espacio	.....	Vectorial
Tiempo	.....	Escalar
Masa	.....	Escalar
Volumen	.....	Escalar
Superficie	.....	Vectorial
Velocidad	.....	Vectorial
Aceleración	.....	Vectorial
Fuerza	.....	Vectorial

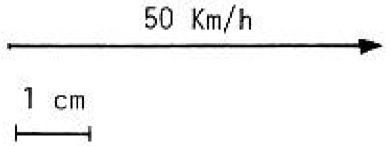
Las magnitudes vectoriales presentan ciertas dificultades de manejo pues no podemos, en general, operar matemáticamente con ellas igual que hacemos con las escalares. Necesitaremos utilizar unas nuevas reglas de cálculo, según veremos en el apartado 3 de este tema.

2. VECTORES. REPRESENTACION GRAFICA



Un vector se define como un "segmento orientado". Su misión es la de representar gráficamente magnitudes vectoriales a fin de poder operar matemáticamente con ellas.

Para trabajar con vectores, lo primero que debemos hacer es establecer una escala adecuada para representar gráficamente una cantidad vectorial.



Por ejemplo, si deseamos representar mediante un vector una velocidad de 50 Km/h, sería un disparate dibujar un vector de 50 Km de longitud. Es más sensato hacer un cambio de escala, por ejemplo:

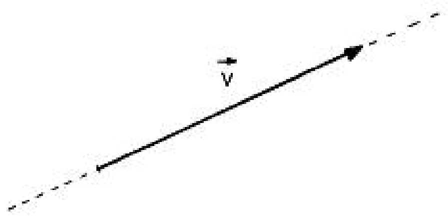
10 Km/h = 1 cm sobre el papel

De esta forma, una velocidad de 50 Km/h se representa mediante un vector de 5 cm de longitud.

Llamamos MODULO de un vector a su longitud; la cual convertida según la escala correspondiente nos dará el valor real representado por dicho vector. La expresión; "módulo de ...", se escribe matemáticamente mediante dos barras verticales encerrando la letra que representa la magnitud vectorial.

Así;

$|\vec{a}|$, se lee; "módulo del vector a"



A la recta sobre la que se apoya el vector se le llama DIRECCION del vector.

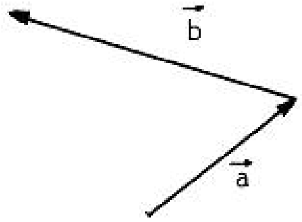
Conocida la dirección de un vector, éste puede estar orientado en un sentido ú otro. La orientación que tenga marca el SENTIDO del vector. Para una dirección dada existen, obviamente, dos sentidos posibles.

El módulo, la dirección y el sentido de un vector son los datos necesarios para poder representar magnitudes vectoriales.

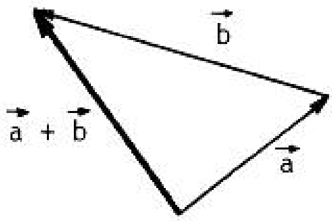
Dado un vector, llamamos ORIGEN y EXTREMO del vector a los puntos que marcan el principio y el final del segmento

Dos vectores son OPUESTOS cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos contrarios.

Si dos vectores son opuestos, tienen distinto signo uno del otro.



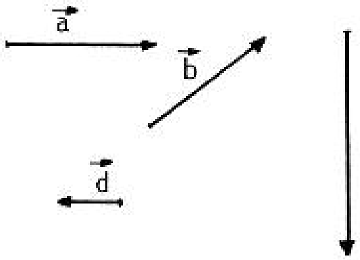
Para sumar vectorialmente $\vec{a} + \vec{b}$, trazamos por el extremo de $\vec{a}$ un vector equipolente al $\vec{b}$.

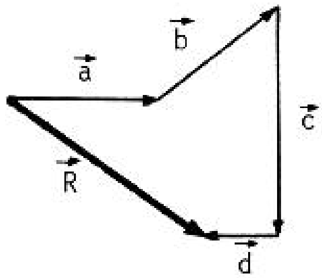


Uniendo el origen de $\vec{a}$ con el extremo de $\vec{b}$, obtenemos el vector suma.

Si se tratara de más de dos vectores, repetimos el proceso tantas veces como vectores tengamos y al final el vector suma se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del último.

Ejemplo 1: Sumar vectorialmente $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.





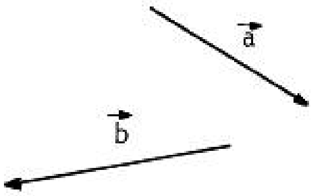
Cuando los vectores tienen direcciones cualesquiera no es posible, en general, obtener el módulo del vector suma mediante expresiones matemáticas sencillas. Es necesario recurrir a la trigonometría para calcular el módulo resultante analíticamente, por lo cual en este tema tan sólo vamos a exponer el método gráfico en las operaciones con vectores.

El vector suma recibe el nombre de RESULTANTE del sistema de vectores. Suele representarse con la letra $\vec{R}$.

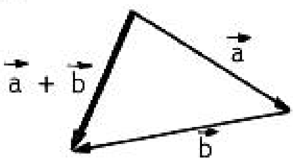
La suma vectorial tiene la propiedad conmutativa; es decir, no importa el orden en el que vayamos tomando los vectores a la hora de realizar la suma. Así;

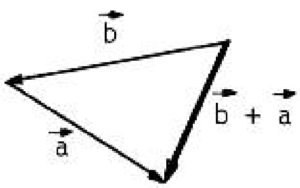
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{a} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{d} = \dots \text{ etc.}$$

Ejemplo 2: Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, demostrar que: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Realicemos ambas sumas y comparemos los resultados.

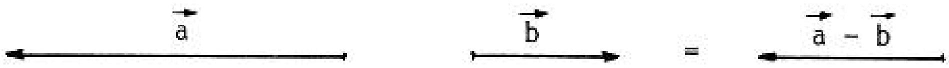




b) <u>Resta de vectores</u>

b.1) Si los vectores tienen igual dirección

La resta vectorial de dos vectores de igual dirección es igual a otro vector de igual dirección cuyo módulo es igual a la resta de los módulos de los vectores y cuyo sentido es el del mayor.



Es el caso de dos personas tirando de una cuerda en sentidos contrarios. En este caso particular, la resta de cantidades vectoriales da el mismo resultado que si se tratara de escalares.

b.2) Si los vectores tienen distintas direcciones

Recordemos de Matemáticas que restar dos cantidades es equivalente a sumar a la primera el opuesto de la segunda.

Es decir;

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \longrightarrow \text{opuesto del vector } \vec{b}$$

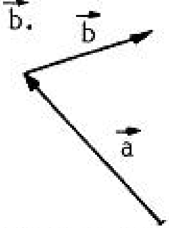
Por tanto, la resta vectorial no es más que un caso particular de la suma vectorial.

"Para restar vectorialmente dos vectores no tenemos más que SUMAR VECTORIALMENTE AL PRIMERO EL OPUESTO DEL SEGUNDO VECTOR".

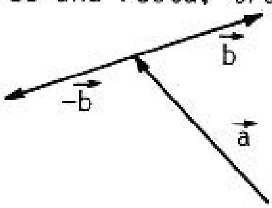
Recordemos que el opuesto de un vector es el mismo vector cambiado su sentido.

Ejemplo 3: Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, restarlos.

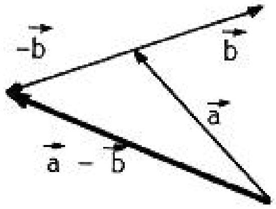
El primer paso consiste en trazar por el extremo de $\vec{a}$ un vector equipolente al $\vec{b}$.



Como se trata de una resta, trazamos por el extremo de $\vec{a}$ el opuesto al $\vec{b}$.



Unimos el origen de $\vec{a}$ con el extremo de $-\vec{b}$.



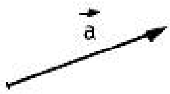
NOTA: En la práctica no es necesario trazar el vector $\vec{b}$, podemos -- saltarnos el primer paso trazando directamente el $-\vec{b}$.

El módulo de la resta de dos vectores no es posible calcularlo mediante métodos matemáticos sencillos. Si los vectores adoptan direcciones cualesquiera es necesario recurrir a la trigonometría.

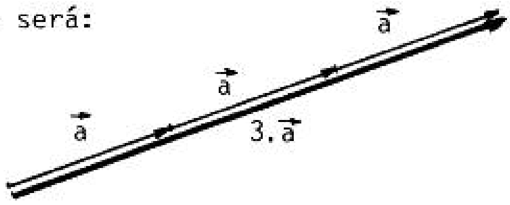
c) Producto de un escalar por un vector

"El producto de un escalar por un vector es otro vector de igual di-- dirección y sentido cuyo módulo es igual al producto del escalar por el módulo del vector".

Por ejemplo, sea el vector $\vec{a}$



El producto $3.\vec{a}$, será:



NOTA: Los tres vectores $\vec{a}$ no se dibujan en la práctica, tan sólo el vector $3.\vec{a}$.

4. CASOS PARTICULARES

Dado el carácter elemental de este libro y partiendo del hecho de -- la carencia de una sólida base matemática para desarrollar el cálculo trigonométrico, tan sólo se le va a exigir al alumno el método gráfico para hallar la resultante de una suma o resta de vectores. Sin embargo, existen algunos casos particulares en que es posible obtener analíticamente la resultante de un sistema de vectores;

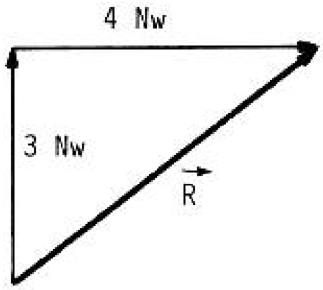
- cuando los vectores tienen igual dirección.
- cuando los vectores tienen direcciones perpendiculares.

El primer caso ya lo hemos estudiado en los apartados a.1 y b.1 de - la pregunta anterior.

Veamos ahora el segundo caso.

Cuando los vectores son perpendiculares su suma o resta vectorial -- forma un triángulo rectángulo, al cual podemos aplicar el teorema de Pitágoras para obtener el módulo de la resultante.

Ejemplo 4: Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de módulos 3 Nw y 4 Nw respectivamente. Hallar la suma vectorial y el módulo del vector resultante.



En primer lugar, hallo la suma vectorial según el método explicado en el apartado 3.a.2.

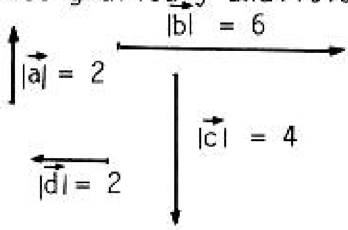
A la vista de la figura, como se forma un triángulo rectángulo aplico Pitágoras; $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los catetos y la hipotenusa es el vector resultante $\vec{R}$.

Recordemos que Pitágoras dice:

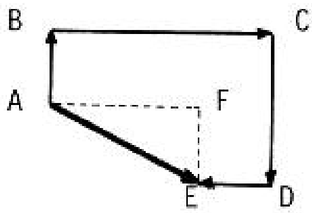
$$\text{hipotenusa} = \sqrt{(\text{cateto } 1)^2 + (\text{cateto } 2)^2}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5\ \text{Nw}}}$$

Ejemplo 5: Sumar vectorialmente los siguientes vectores, obteniendo la resultante gráfica y analíticamente.



Hay que hallar: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$



En el triángulo rectángulo AEF se cumple:

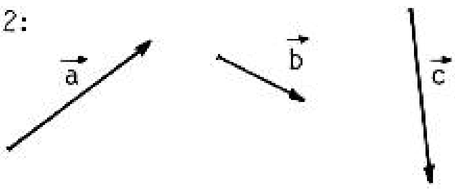
$$AE = \sqrt{AF^2 + FE^2}$$

$$AF = 4 \text{ y } EF = 2$$

$$AE = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \underline{\underline{4{,}47}}$$

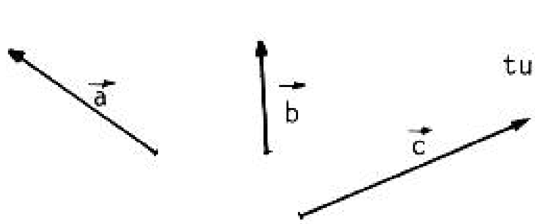
EJERCICIOS DEL TEMA 2

1.2:



Sumar vectorialmente los vectores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

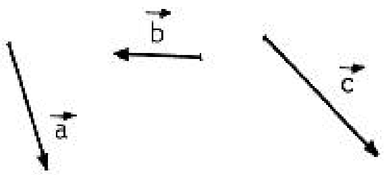
2.2:



Dados los vectores; $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Efectuar las siguientes operaciones:

1) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
2) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

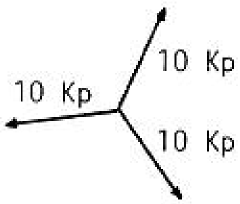
3.2:



Dados los vectores; $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Efectuar las siguientes operaciones:

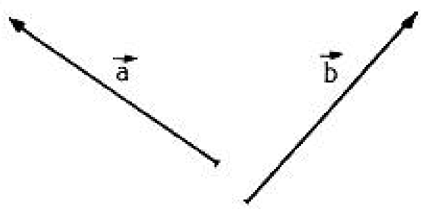
1) $2.\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
2) $\vec{a} - 3.\vec{b} + 2.\vec{c}$

4.2:



Hallar la resultante del sistema de fuerzas de la figura.

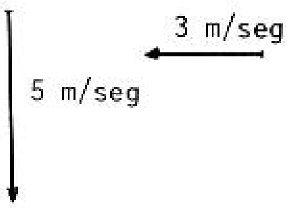
5.2:



Demostrar que la suma vectorial tiene la propiedad conmutativa, comprobando que se cumple con los dos vectores a y b de la figura. Es decir, comprobar que;

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

6.2:



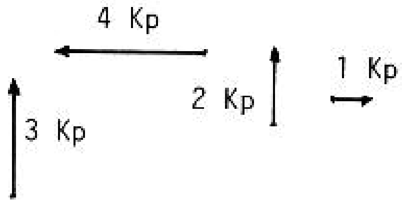
Hallar la resultante analítica y gráficamente de los dos vectores de la figura.

7.2:

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Demostrar que se cumple;

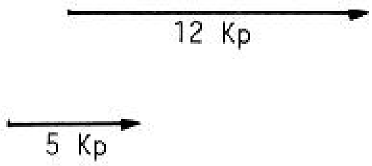
$$2.(\vec{a} + \vec{b}) = 2.\vec{a} + 2.\vec{b}$$

8.2:



Hallar la resultante, analítica y -- gráficamente del sistema de vectores de - la figura.

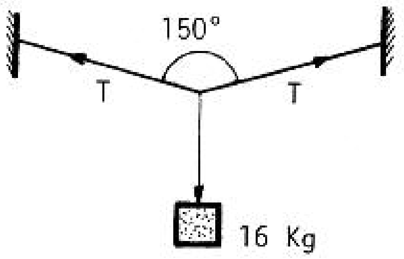
9.2:



Dos fuerzas de 5 Kp y 12 Kp actúan - simultáneamente sobre un cuerpo. Hallar - gráficamente su resultante cuando dichas fuerzas forman entre sí un ángulo de:

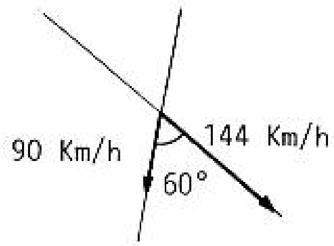
a) 0°. NOTA: Tomar como escala;
b) 45°. 1 cm = 1 Kp
c) 90°.
d) 180°.

10.2:



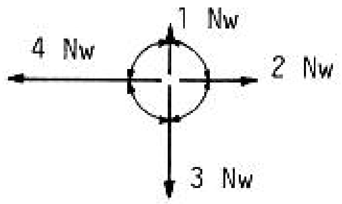
En una cuerda atada firmemente por - sus extremos colgamos de su punto medio una masa de 16 Kg. Al tensarse, las dos mitades de la cuerda forman entre sí un ángulo de 150°. Calcular gráficamente la -- tensión que aguanta cada mitad de la cuerda.
NOTA: Tómese como escala; 1 cm = 4 Kp.

11.2:



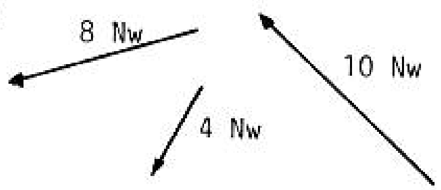
Dos vehículos circulando con velocidades de 144 Km/h y 90 Km/h se cruzan en el paso elevado de una autopista. Calcular gráficamente la velocidad relativa de ambos vehículos en el momento del cruce - si las autopistas forman entre sí un ángulo de 60°.
NOTA: Tómese como escala; 1 cm = 18 Km/h.

12.2:



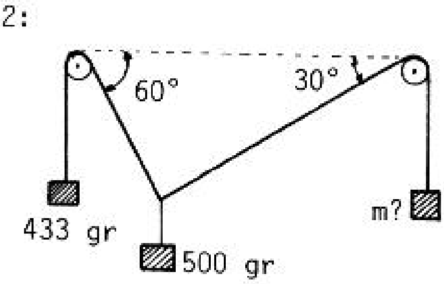
Calcular gráficamente y analíticamente la resultante de 4 fuerzas coplanarias de módulos; 1 Nw, 2 Nw, 3 Nw y 4 Nw si están orientadas formando ángulos de 0°, 90° 180° y 270°, respectivamente.

13.2:



Tres fuerzas coplanarias de módulos; 8 Nw, 4 Nw y 10 Nw actúan simultáneamente sobre un cuerpo. Calcular gráficamente la fuerza necesaria para contrarrestrarlas, es decir, una fuerza tal que sumada a las tres anteriores den una resultante nula.
NOTA: Tómese como escala; 1 cm = 2 Nw

14.2:



Prescindiendo de rozamientos y del - peso propio de la cuerda, calcular gráficamente y por tanto, aproximadamente, el valor de la masa que hay que situar a la derecha para que el sistema permanezca en equilibrio.