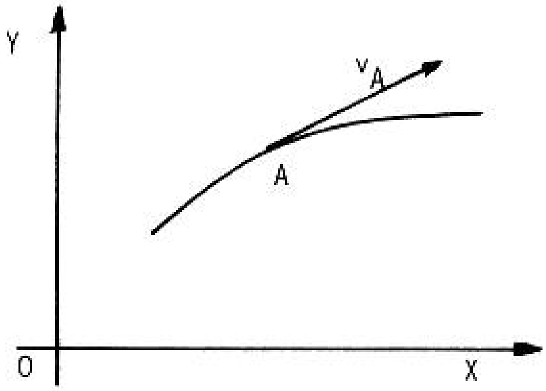
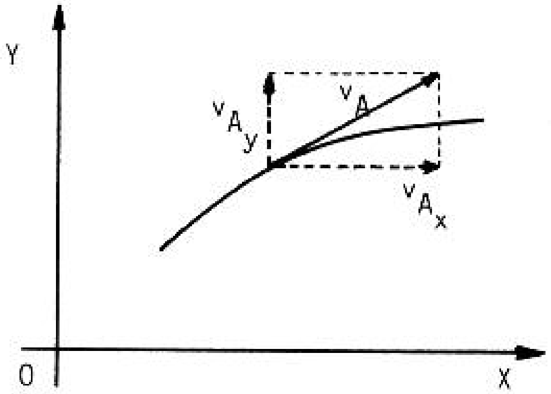
RCULAR

1. INTRODUCCION



Para estudiar el movimiento de un cuerpo que se desplaza siguiendo una -- trayectoria plana cualquiera, resulta - conveniente descomponer el vector velocidad en sus dos componentes, según las direcciones paralelas a los ejes del -- sistema de referencia elegido.

Sea por ejemplo, el móvil M desplazándose a lo largo de la trayectoria r. Tal como se demuestra con la ayuda del cálculo diferencial, el vector - velocidad es en todo momento tangente a la trayectoria. Por tanto, la veloci-- dad en A; $\vec{v}_A$, es tangente a la trayectoria r en el punto A.



Si nuestro sistema de referencia - está formado por los ejes OX y OY, descompongamos el vector $\vec{v}_A$ en sus dos componentes $\vec{v}_{A_x}$ y $\vec{v}_{A_y}$.

Podemos escribir pues, que.

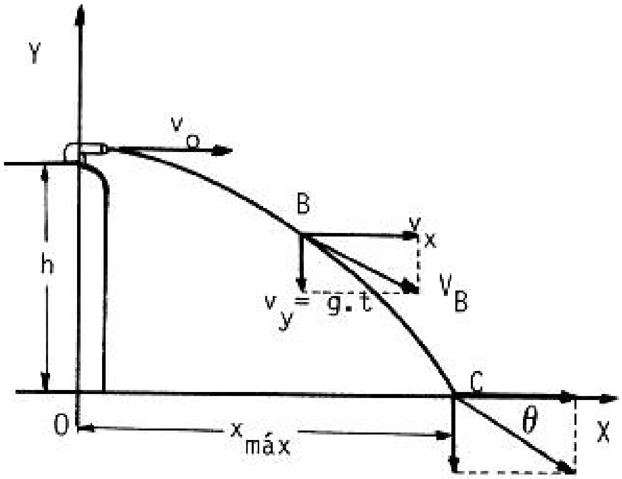
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A_x} + \vec{v}_{A_y}$$

Con lo cual el movimiento curvilíneo original queda descompuesto en dos movimientos rectilíneos, a los cuales resulta más sencillo aplicarles las ecuaciones de la cinemática estudiadas hasta ahora.

Veamos a continuación algunas aplicaciones importantes de este método.

2. TIRO HORIZONTAL

Imaginemos un cañón situado en lo alto de un acantilado a una altura de h metros sobre el nivel del mar, el cual efectúa un disparo según una direc ción horizontal con el suelo.



Una vez elegido nuestro sistema de referencia (ejes OX y OY), pasemos a estudiar el movimiento del proyectil.

Al disparar el cañón, el proyectil sale con una velocidad horizontal uniforme v_o que mantendrá inalterable hasta el momento del impacto final. Esto es cierto, siempre y cuando prescindamos del rozamiento con el aire.

Inmediatamente después de salir el proyectil de la bocana del cañón, comienza a actuar sobre él la gravedad terrestre, y de acuerdo con las ecuaciones de la cinemática, le provoca una velocidad vertical hacia abajo v_y, de valor $g.t$

En un punto B genérico de la trayectoria, las componentes de la velocidad valen.

$$v_x = v_o$$

$$v_y = g.t$$

Obsérvese que mientras v_x permanece constante, la componente vertical v_y, va aumentando progresivamente su valor al ser directamente proporcional al tiempo.

Las componentes horizontal y vertical del espacio, toman pues los valores.

(1) $\quad x = v_o.t$ (se trata de un movimiento uniforme)

(2) $\quad y = h - \frac{1}{2}.g.t^2$ (movimiento uniformemente acelerado)

Despejando en (1) el valor del tiempo y sustituyéndolo en (2).

$$t = \frac{x}{v_o}$$

$$y = h - \frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{v_o^2}$$

$$\boxed{y = h - \frac{g}{2v_o^2}.x^2} \qquad (3)$$

La ecuación anterior es la de la trayectoria del proyectil referida a los ejes OX y OY.

El tiempo de caída se obtiene imponiendo la condición.

$$y = 0$$

Y sustituyendo en (2).

$$0 = h - \frac{1}{2}.g.t^2$$

$$\frac{1}{2}.g.t^2 = h$$

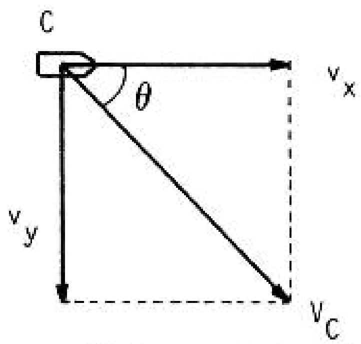
$$t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$\boxed{t_{caída} = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \qquad (4)$$

El alcance horizontal máximo se obtiene sustituyendo en (1) el tiempo obtenido en (4).

$$x = v_o.t$$

$$\boxed{x_{máx} = v_o.\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$



La velocidad con la que llega al agua se obtiene al sumar vectorialmente las dos componentes de la velocidad en C

Resolviendo por Pitágoras el triángulo rectángulo que se forma.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (5)$$

Obsérvese que en C, se cumple.

$$v_{x_C} = v_o$$

$$v_{y_C} = g.t_{caída} = g.\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

Y sustituyendo en (5),

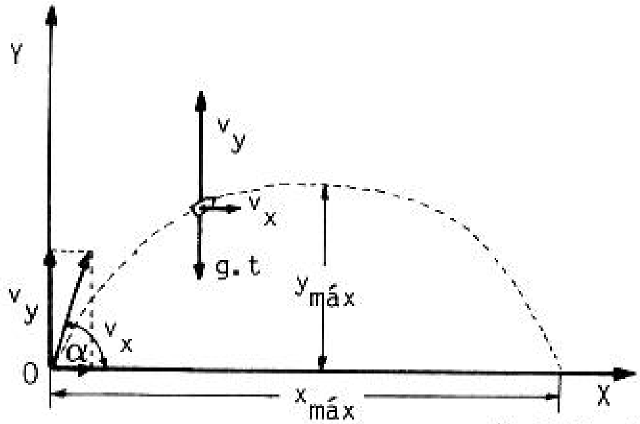
$$\boxed{v = \sqrt{v_o^2 + 2gh}}$$

El ángulo de incidencia del proyectil con el agua; θ, se obtiene hallando la tangente de dicho ángulo.

$$\text{tg}\,\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_o}$$

$$\boxed{\theta = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{2gh}}{v_o}}$$

3. TIRO OBLICUO



Sea un cañón situado sobre una superficie horizontal, el cual dispara un proyectil formando un cierto ángulo α con la horizontal.

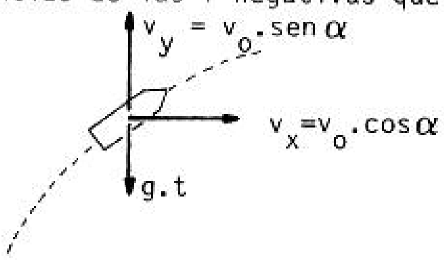
Las componentes del vector velocidad debido a la velocidad inicial de lanzamiento v_o, valen.

$$v_x = v_o.\cos\alpha$$

$$v_y = v_o.\text{sen}\,\alpha$$

Estas dos componentes permanecen constantes a lo largo de todo el movimiento si despreciamos los efectos de rozamiento con el aire.

Por otro lado, nada más lanzarse el proyectil, comienza a actuar sobre él la gravedad, de forma que aparece otra componente vertical dirigida en el sentido de las Y negativas que va creciendo con el tiempo.



En resumen, en un punto cualquiera de la trayectoria, el proyectil se ve afectado por las componentes de velocidad indicadas en la figura de la izquierda.

Las componentes horizontal y vertical del espacio toman los valores.

(6) $\quad x = v_x.t = v_o.\cos\alpha.t$ (movimiento uniforme)

(7) $\quad y = v_y - \frac{1}{2}.g.t^2 = v_o.\text{sen}\,\alpha.t - \frac{1}{2}.g.t^2$ (m.u.a.)

Si despejamos el tiempo en (6) y lo sustituimos en (7).

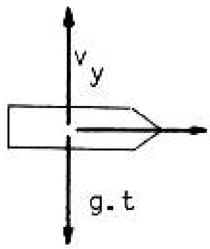
$$t = \frac{x}{v_o.\cos\alpha}$$

$$y = v_o.\operatorname{sen}\alpha.\frac{x}{v_o.\cos\alpha} - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_o.\cos\alpha}\right)^2$$

$$\boxed{y = \operatorname{tg}\alpha.x - \frac{g}{2v_o^2.\cos^2\alpha}.x^2} \qquad (8)$$

La ecuación anterior representa la trayectoria que sigue el proyectil, referida a nuestro sistema de referencia OX y OY, cuando es disparado con una velocidad inicial v_o y formando un ángulo α con la horizontal.

Para obtener la altura máxima alcanzada por el proyectil, nos fijamos en las componentes verticales de la velocidad.



La componente v_y permanece constante, mientras que la componente g.t va aumentando paulatinamente su valor hasta igualar a v_y.

En el momento en que.

$$g.t = v_y$$

El proyectil alcanza su máxima altura y un instante después ya comienza a descender. Por tanto, la condición para la $y_{máx}$ se obtiene haciendo.

$$g.t = v_y$$

Y despejando de aquí el tiempo.

$$t = \frac{v_y}{g} = \frac{v_o.\operatorname{sen}\alpha}{g}$$

Llevando este valor del tiempo a (8), obtenemos.

$$y_{máx} = v_o.\operatorname{sen}\alpha.\frac{v_o.\operatorname{sen}\alpha}{g} - \frac{1}{2}.g.\left[\frac{v_o.\operatorname{sen}\alpha}{g}\right]^2$$

$$y_{máx} = \frac{v_o^2.\operatorname{sen}^2\alpha}{g} - \frac{g.v_o^2.\operatorname{sen}^2\alpha}{2g^2} = \frac{v_o^2.\operatorname{sen}^2\alpha}{g} - \frac{v_o^2.\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

$$y_{máx} = \frac{2v_o^2.\operatorname{sen}^2\alpha - v_o^2.\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

$$\boxed{y_{máx} = \frac{v_o^2.\operatorname{sen}^2\alpha}{2g}}$$

Obsérvese que el máximo valor de la altura se alcanza cuando $\operatorname{sen}^2\alpha = 1$ es decir cuando $\alpha = 90º$, que corresponde a un lanzamiento vertical.